МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КАЗАХСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Методические рекомендации по оформлению и оцениванию письменных экзаменационных работ по математике за курс основной и общеобразовательной школы

Негізгі орта және орталау мектеп курсы бойынша математикадан емтихан жұмысының жазылу талаптары мен бағалану критерийлері туралы методикалық ұсыныстар

Усть-Каменогорск - 2016г
Өскемен – 2016ж

Бұл жинақтаматематикадан қортынды аттестациялау кезінде оқушылардың жазбаша емтиханжұмыстарының дұрыс жазылуымен бағалануы бойыншаматематика пәні мұғалімдеріне методикалық ұсыныстар жиынтығы беріліп отыр. Оның құрамы түсініктеме хаттан, сыртқы бетін толтыруға қойылатын талаптардан, жазбаша емтихан жұмысыныңтолтырылуынақойылатын талаптардан, бағалау критерийлерінен және олардың мазмұнынан, жұмысты тексеруді жүргізу барысынан, пікірдің құрылымына ұсыныстардан және сонымен бірге нақты тапсырмалардың (есептердің) шығару кезіндегі тақырыбына байланысты жазылу үлгісіне ұсыныстардан тұрады.

Құрастырушылар:

Нурпеисова А.З. Өскемен қаласыныңоқу-әдістемелік білім бөлімінің басшысы;
Агафонова Т.Г. Өскемен қаласы әкімдігінің «№23 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Антропова Л.А.Өскемен қаласы әкімдігінің «№24 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Веричева Е.В. Өскемен қаласы әкімдігінің «№4 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Гертель Т.П. Өскемен қаласы әкімдігінің «№11 мектеп-гимназиясы» КММ математика пәні мұғалімі;
Дукенбаева Б.О. Өскемен қаласы әкімдігінің «№23 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Ильгова И.В. Өскемен қаласы әкімдігінің «№23 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Исмаилова А.Б.Өскемен қаласы әкімдігінің «№35 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
учитель математики КГУ "Средняя школа № 35" акимата г.Усть-Каменогорска;
Капустина Е.А.Өскемен қаласы әкімдігінің «№23 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Касенова Г.Т.Өскемен қаласы әкімдігінің «№3 мектеп-лицейі» КММ математика пәні мұғалімі;
Крушинская О.И.Өскемен қаласы әкімдігінің «№24 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Коваленко Т.И.Өскемен қаласы әкімдігінің «№18 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Кыржибаева А. Өскемен қаласы әкімдігінің «№33 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Нұрғалиева Ж.Т. Өскемен қаласы әкімдігінің «№23 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі;
Сахариева Б.М.Өскемен қаласы әкімдігінің «№3 мектеп-лицейі» КММ математика пәні мұғалімі;

Таенова Р.М.Өскемен қаласы әкімдігінің «№10 мектеп-гимназиясы» КММ математика пәні мұғалімі;
Чагайдак М.В.Өскемен қаласы әкімдігінің «№15 орта мектебі» КММ математика пәні мұғалімі.

Түсініктеме хат.

Жалпы білім беретін математика курсы 1-ші, 11-ші сыныптарда оқытылады. Оқытудың әрбір кезеңінде оның белгілі бір басымдыққа ие міндеттері бар және кезеңдер арасындағы бірізділікті сақтай отырып жүзеге асырылады, бірақ біліміне, білігіне және дағдылларына қойылатын талаптар бөлімінде мектеп бітірушілерді қортынды аттестациялау формасының өзгеруі жағдайында маңыздылығы болып табылатын жазба жұмыстарының толтырылуына және бағалануына қойылатын талаптар жазылмаған. Методикалық ұсыныстар жинақтамасының құрылымы математика пәні мұғалімдеріне есептің шығарылуының толтырылуына назар аударуға көмектеседі, әсіресе оқушыларды жазбаша қортынды аттестациялауға дайындау барысында.

Орталау мектеп курсы бойынша математикадан жазбаша түрде емтихан жұмысын өткізуге арналған тапсырмалардың негізгі және негізгі орталау мектеп курсы білім мазмұнының көлемін негізінде құрылымдалатындығын ескере отырып, біз жалпы білім беретін мектептің 9-11 сыныптарының негізгі математикалық білім мазмұнына тоқталатын боламыз. Ұсыныстар келесі бөлімдер бойынша әзірленді: «Санды өрнектер», «Тригонометриялық өрнектерді түрлендіру», «Тригонометриялық теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері», «Туындының геометриялық мағынасы», «Функцияны зерттеу және графигін салу», «Берілген кесіндідегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәні», «Алғашқы функция және интеграл. Берілген сызықтармен шектелген фиграның ауданы», «Алгебралық өрнектерді түрлендіру», «Алгебралық теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері», «Иррационал теңдеулер және олардың жүйелері», «Көрсеткіштік теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері», «логарифмдік теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері», «Аралас теңдеулер жүйелері», «мәтіндік есептер», «Тізбектер».

Берілген ұсыныстар мұғалімдерге тек қана оқушылардың математикалық дайындығына қойылатын талаптар туралы ғана емес, сонымен бірге қортынды аттестациялаудың жазбаша жұмыстарына қойылатын талаптар туралы да біртұтас, нақты түсінік қалыптастыруына мүмкіндік бере отырып, сонымен бірге Қазақстан Республикасы үкіметінің 2012 жылы 23 тамызда бекітілген № 1080 жалпы білім беретін мемлекеттік стандарт туралы жарғысына сай оқу процесін дұрыс жоспарлауына ықпал ететін болады.

Жазбаша емтихан жұмыстарының жазылуына және бағалануына қойылатын талаптар туралы ұсыныстарды әзірлеу барысында басшылыққа алынды:

1. Әдістемелік-методикалық хат «Қазақстан Республикасы (2000ж) ұйымдарының 11 сынып түлектерінің жазбаша жұмыстарының жазылуына бойынша оқушылардың математикалық дайындығына қойылатын талаптар»
2. Негізгі мектеп курсы бойынша математикадан жазбаша емтихан жұмыстарының жазылуы мен бағалануына методикалық ұсыныстар (2011ж). Құрастырушылар: Г.Ә.Әбілмаш, №42 орта мектептің жоғары санатты математика пәні мұғалімі; С.Т. Лаптева, №39 орта мектептің жоғары санатты математика пәні мұғалімі; И.Б. Керимова, №7 орта мектептің жоғары санатты математика пәні мұғалімі; Н. Е. Исмагулова, №43 орта мектептің жоғары санатты математика пәні мұғалімі.
3. Мақала Г.В.Дорофеева «Алгебра және анализ бастамаларынан емтихан туралы», («Математика в школе» 1990ж).

Негізгі мектеп курсының алгебра пәні бойынша және 11-ші сыныпта алгебра және анализ бастамаларынан жазбаша емтихан түрінде алынады. Жазбаша емтихан жұмыстарының жазылуына ұсыныстар береміз.

Сыртқы беті келесі текспен жазылады:

Негізгі орта мектеп курсы бойынша 9 «а» сынып оқушысы Аманжолова Сәуленің математикадан жазбаша емтихан жұмысы	Негізгі орталау мектеп курсы бойынша 9 «а» сынып оқушысы Аманжолова Сәуленің Алгебра және анализ бастамаларынан жазбаша емтихан жұмысы

Қалған барлық мәліметтер: қала, аудан, мектептің типі, номері, емтиханның өткізілген күні және тағы басқалары түлектердің жұмыстарында қойылған штампта анық оқылуы қажет.

Бірінші беті сыртқы бет ретінде толтырылады, екінші бетінде бірінші жолда нұсқа жазылып көрсетіледі (арабша цифрлармен жазылады: 1,2), содан соң есеептің шығарылуы басталады. Жазу барысында қызыл сызықтан 0,5 см, беттің бүгілген жерінен 1,5 см қалдырылып отырылады. Жұмысты орындауға қажет қосымша беттер (черновик) берілуі тиіс. Егер, жұмысты орындау барысында оқушы қосымшы бетті (черновик) қолданса, онда емтихан жұмысымен бірге қосымша беттерді (черновиктерді) де өткізуі тиіс.

Есеп шығару алдында жазбаша жұмыстың барлық тапсырмаларының берілгенін көшіріп жазу міндетті емес. Есептің шарты көшіріліп жазылады (мәтін) және шығарылуы келтіріледі.

Қосымшы бетте (черновик)тапсырмалар кез-келген ретпен орындала береді, жұмыстың таза бетінде емтихан жұмысында қандай ретпен берілсе сәйкесінше сол ретпен жазылып орындалады.

Емтихан жұмысында сөзді қысқартып жазуға болмайды, тек жалпылама қабылданған қысқартулар ғана қолданылады. Әрбір есептің шығарылуынан кейін жауабы жазылады. Есептің шығарылуын жазу барысында оқушының сұраққа сәйкес теориялық білімін, оны есеп шығару барысында қолдану біліктілігін көсететін талқылауды жазып отыру қажет. Сөйлемдерде сөздерді таңбалармен («бұдан шығады» сөзінің орнына, «өспелі» сөзінің орнына және т.б.) алмастыруға болмайды. Бергілеулер тек есептің шығарылуының белгілеумен жазылатын жерінде ғана қолданылады.

Мәтін есептерді шешу барысында, шартын жазғаннан кейін, түсініктеме келтіру маңызды, тек содан кейін ғана құрылған теңдеу жазылады.

Жазбаша емтихан жұмысынжазып толтыру.

1. Жазба жұмысын анық етіп таза, жүйелі, әрі сауатты орындау қажет.
2. Есептің мәтінін толық жазу қажет.
3. Сызбаларды бөлек сол жаққа орналастыру қажет.
4. Барлық сызбаларды сызғышты қолданып қаламмен сызу қажет.
5. Есептің қысқашашартын (берілгенін)сызбаның оң жағына ретімен жазу қажет.
6. Есептің сұрағын қысқаша шартын жазу үлгісінен кейін жазып көрсету қажет.
7. Символдар мен белгілерді орнымен қолдану қажет.
8. Тапсырманың шешу жолдарын тізбектеп те, амалдап та жазуға болады.
9. Теңдеудіңшығарылуы рет-ретімен әр жолға бірінің астына бірі жазылғаны дұрыс.
10.Есептің жауабы шешімінің астына жеке жолға, сол жағынан, жазылады.

Маңызды формулалар, теңеулер, теңсіздіктерді ерекшелеу үшін бөлек таза жолға жазу қажет.

Бір жолға жазғанда математикалық белгілерді дұрыс орналастыру қажет. Формуланы немесе өрнекті бір жолдан екінші жолға тасымалдауды тек «+», «-», «=» таңбаларының көмегімен орындауға рұхсат етіледі. Тасымалдау кезінде «+», «-», «=» таңбалары келесі жолдың басында қайталанып жазылуы қажет. Бөлшек сызығы мен теңдік белгілерін дұрыс орналастырып жазу қажет. Баяндаудың математикалық қатаң тәртібін қадағалап отыру қажет және математикалық белгілеулерді нақты дәл қолдану қажет.

Жазбаша емтихан жұмысын бағалау критерийлері қандай?

Мұғалімдерге математикадан емтихан жұмысын тексеру барысында бағаны қою үшін төменде келтірілген осы не басқа бағаны қою талаптарын орындау міндетті. Қазіргі уақытта жұмыс алты тапсырмадан тұрады және «5-тік» бағасы кез-келген дұрыс орындалған бес тапсырмаға қойылады. Егер барлық алты тапсырма да дұрыс орындалған болса, онда екіден артық болымсыз қателердің болуына қарамастан емтихан комиссиясы жұмысты «5-ке» бағалай алады.

Өрескел қателерге жататын қателер, бұл оқушыныңформулаларды, ережелерді,негізгі қасиеттерді,теоремалардыбілмеуін және оларды қолдана алмауын анықтайтын қателер, оқулықта қарастырылған есепті шығару тәсілдерін (есептердің шығарылу жолдарын) білмеуі, сонымен қатарегер олар байқамай жіберілген қате болмаған жағдайда есептеуде жіберілген қателер. Геометриялық есептің шығарылуында сызбаның жоқтығы, олардың есеп шартына сәйкес келмеуі, қолданылған теоремалар, аксиомалар, леммаларға нұсқаудың болмауы да өрескел қате деп танылады.

Өрескел емес қателерге жататындар: түбірді жоғалту немесе жауапқа бөгде түбірді жазып қою, түсініктемесіз түбірлердің біреуін немесе онымен таңбасы бөлекті алып тастау. Геометриялық есептердесызбанысызу барысында пропорцияны сақтамау,салу ережелерін (көрінбейтін сызықтар, шар полюстерінің бейнесінің жоқтығы, т.с.с.) сақтамау.

Болымсыз қателерге жататындар:тиімді тәсілді пайдаланбау, абайсызда жаңылыс жазылған қате (описка), есептің шығарылуында түсініктеменің, негіздеменің жеткіліксіздігі немесе жоқтығы. Геометриялық есептерге сызылған сызбаның артық жерлерінің көптігі, өлшем бірліктерінің болмауы, координаталық өстерді белгілемеу, өстердің бағытын көрсетпеу, сан түзінің оң бағытын нақтыламау.

Егер бір қате (бір болымсыз қате) бірнеше рет қайталанса, онда ол бір ғана қате(бір ғана болымсызқате) болып саналады.

Сызып тасталған жерлер (өте ұқыпты орындалғаны дұрыс, тиянақты) есепті шығару жолын іздегендігін білдіретін болса, оны қатеге санамауға болады (Ерекше үлгідегі аттестат иегерлерінен басқалары).

«5» (үздік) деген бағажұмыс толық және қатесіз орындалған жағдайда қойылады. «Алтын белгі» таңбасы бар ерекше аттестат алуға үміткер түлектердің жұмыстарында болымсыз қателердің өзі болмауы керек.

Үздік аттестат алуға үміткер түлектердің жұмыстарында өрескел емес қателер мен болымсыз қателердің саны екеуден артық болмауы керек.

«4» (жақсы) деген баға келесі жағдайда қойылады:

а) бес тапсырма толық дұрыс орындалса және өрескел қателер жіберілмеген, бірақ болымсыз қателері екіден артық болған немесе өрескел емес қате мен болымсыз қате болған жағдайда;

б)4 тапсырма дұрыс орындалса және бір тапсырмада қателер жіберілген жағдайда;

в) алтыншы тапсырма орындалмаған немесе орындалуында қателер жіберілген жағдайда.

«2» (қанағаттанарлықсыз) деген баға егер үш (немесе оданда көп) тапсырманың әрбіреуінде (бір немесе оданда көп) өрескел қателер жіберілген жағдайда қойылады.

«1»(қанағаттанарлықсыз) деген баға әрбір тапсырманың үштен бір бөлігі ғана орындалған жағдайда қойылады.

«3» (қанағаттанарлық) деген бағабарлық қалған жағдайларда қойылады.

Оқушылардың жазбаша жұмыстарын тексеру және бағалау тәртібі қандай?

- Баға оқушының жұмысынан кейін беттің сол жағына қойылады. Сонан соң «5» (үздік) деп бағаланған жұмысқа емтихан комиссиясы пікір жазады. Ары қарай емтихан комиссиясы төрағасының және комиссия мүшелерінің қолдары қойылады. Түлектердің жұмыстарында емтихан комиссиясы төрағасының және емтихан алушылардың аты, тегі, әкесінің аты, қолдары түсінікті етіп және толық жазылуы керек (Қысқартуға болмайды).

Пікір (тақарап жазылады)

____

____

Емтихан комиссиясы төрағасы: Ковалев Иван Михайлович ________

Емтихан алушы мұғалім: Айдарова Карлыгаш Нурбековна ________

Ассистенттер:Иванова Светлана Степановна ________

Жұмыстарды тексеру жалпы білім беретін мекемеде математика мұғалімі мен емтихан комиссиясы мүшелерінің қатысуымен жүзеге асырылады. Егер емтихан болған күні тексеру аяқталмай қалған болса, онда жұмыстар мектеп директорына сақтауға өткізіледі. Емтихан комиссиясының барлық мүшелері жұмысты мұқият оқып шығады, жұмыста орын алған барлық қателер мен болымсыз қателер көрсетіледі. «Алтын белгі» таңбасы бар ерекше аттестатқа үміткер түлектердің жұмыстарына, үздік аттестат алуға үміткер түлектердің жұмыстарына жазбаша осы жұмыстың орындалу сапасы туралы пікір беріледі.

Пікірде нені көрсетілуі қажет?

Пікірде көрсетілуі тиіс: мемлекеттік жалпы білім беру стандарттарының талаптарына сәйкес жұмысты орындау дұрыстығын, таңдаған әдістерініңтиімділігін, талқылау жасауының дұрыстығын, жазбалардың ұқылтылығын, формулалар, қасиеттер, теоремаларды жәнет.б.қолдануды негіздеуінің дұрыстығын, жазбаша емтихан жұмысының жазылуына қойылған барлық талаптардыңтолық орындалғанын.

1 тарау. Санды өрнектер.

1. Бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосуды (азайтуды) орындағанда оларды алдымен ең кіші ортақ бөлімге келтіріп,сонан соң қосуды (азайтуды) бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу ережесі бойынша орындау керек. Шыққан бөлшек, егер мүмкін болса, қысқартылып бүтін бөлігі бөлініп жазылуы керек.

2. Егер азайтқыштың бөлшек бөлігі азайғыштың бөлшек бөлігінен үлкен болса, онда азайғыштың бүтін бөлігінің бір бүтінін оған тең бөлшекпен алмастырып жазу керек.

3. Бүтін және бөлшек бөліктерден тұратын сандарды көбейткенде олар алдымен бұрыс бөлшекке айналдырылады, сонан соң мысалдағыдай көбейтіледі:$2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{19}{6} = \frac{133}{18} = 7\frac{7}{18}$

4. Бүтін және бөлшек бөліктерден тұратын сандарды бөлгенде алдымен олар бұрыс бөлшекке айналдырылып, сонан соң бөлшекті бөлшекке бөлу ережесі бойынша бөлінеді. Мысалы, $3\frac{5}{7} \div 2\frac{1}{3} = \frac{26}{7} \div\div \frac{7}{3} \div \frac{26 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{78}{49}$.

5. Егер өрнекте жақша болса, онда алдымен жақша ішіндегі амалдар, одан кейін қалған амалдар орындалады, жақшаның ішіндегі және сыртындағы амалдарды орындау 1-ші пункттегі ережеге сәйкес орындалады.

6. Егер бөлшек өрнектің мәні есептелетін болса, онда бөлшектің алымындағы амалдар, сонан соң бөліміндегі амалдар рет-ретімен орындалады және алымынан шыққан сан бөлімінен шыққан санға бөлінеді.

Мысал 1. $2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3}$

Есептішешудіңбіріншітәсілі:

$$2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{25}{10} - \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{25}{10} - \frac{4}{3} = \frac{75 - 40}{30} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Жауабы: $1\frac{1}{6}$

Есептішешудіңекіншітәсілі : $2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3}$

$$1)0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$2)\ 2{,}5-1\frac{1}{3}=2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}=2+\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{3}\right)=(2-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{6}=1\frac{1}{6}$$

Жауабы: $1\frac{1}{6}$

Мысал 2. $\left[18\frac{1}{6}-\left(3{,}06\div 7\frac{1}{2}+3\frac{2}{5}\cdot 0{,}38\right)\right]\div\left(19-2\frac{3}{8}\cdot 5\frac{1}{3}\right)$

Берілген санды өрнекті амалдардың орындалу тәртібін көрсете отырып қайта көшіріп:

$$\left[18\frac{1}{6}-^{(4)}\left(3{,}06\div^{(1)} 7\frac{1}{2}+^{(3)}3\frac{2}{5}\cdot^{(2)} 0{,}38\right)\right]\div^{(7)}\left(19-^{(6)}2\frac{3}{8}\cdot^{(5)} 5\frac{1}{3}\right)$$

Енді амалдарды көрсетілген тәртіппен есептеп:

1) $3{,}06\div 7\frac{1}{2}=\frac{306}{100}\div\frac{15}{2}=\frac{306}{100}\cdot\frac{2}{15}=\frac{306\cdot 2}{100\cdot 15}=\frac{153\cdot 2}{50\cdot 15}=\frac{51}{25\cdot 5}=\frac{51}{125}$

2) $3\frac{2}{5}\cdot 0{,}38=\frac{17}{5}\cdot\frac{38}{100}=\frac{17\cdot 19}{5\cdot 50}=\frac{323}{250}=1\frac{73}{250}$

3) $\frac{51}{125}+1\frac{73}{250}=1\ \frac{102+73}{250}=1\frac{175}{250}=1\frac{7}{10}$

4) $18\frac{1}{6}-1\frac{7}{10}=18\frac{5}{30}-1\frac{21}{30}=17\frac{35}{30}-1\frac{21}{30}=16\frac{14}{30}=16\frac{7}{15}$

5) $2\frac{3}{8}\cdot 5\frac{1}{3}=\frac{19}{8}\cdot\frac{16}{3}=\frac{19\cdot 16}{8\cdot 3}=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}$

6) $19-12\frac{2}{3}=18\frac{3}{3}-12\frac{2}{3}=6\frac{1}{3}$

7) $16\frac{7}{15}\div 6\frac{1}{3}=\frac{247}{15}\div\frac{19}{3}=\frac{247}{15}\cdot\frac{3}{19}=\frac{247\cdot 3}{15\cdot 19}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}=2\frac{6}{10}=2{,}6$

Жауабы: 2,6.

2тарау. «Тригонометриялық өрнектерді түрлендіру»

Тригонометриялық тепе-теңдіктерді дәлелдеу барысында қысқаша көбейту формулаларымен қатар негізгі тригонометриялық функциялар арасындағы байланыс формулалары да қолданылады. Кестенің көмегінсізтригонометриялық өрнектердің мәнін есептеуге берілген есептертепе-тең түрлендірулердің көмегімен бастапқы берілген өрнек аргументі таблицалық мәндерден тұратын тригонометриялық функцияларға келтіріліп есептеледі.

Мысал 1.

Егер sinα = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, мұндағы $90^0<\alpha<180^0$ болса, tgα-ны тап

Есептішешудіңбіріншітәсілі:

1) $|\cos\alpha| = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$екендігін ескеріп және $90^0<\alpha<180^0$,α –II ширектің бұрышы екенін біле отырып келесі мәнді табамыз.

   cosα = - $\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) tgα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

   Жауабы: –1

Есептішешудіңекіншітәсілі:

$$1) \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

$$ctg^2\alpha = 1 : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$$

$$ctg^2\alpha = 1 \cdot \frac{4}{2} - 1$$

$$ctg^2\alpha = 2 - 1$$

$$ctg^2\alpha = 1, \quad \alpha \text{ II ширек бурышы екенін ескеріп}$$

$$ctg\alpha = -1$$

$$2) \quad tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{-1}$$

$$tg\alpha = -1$$

$$Ответ: \quad -1$$

Мысал 2.

Келтіру формуласын қолданып есепте:

$tg(-300^0) = -tg300^0 = -tg(270^0 + 30^0) = ctg30^0 = \sqrt{3}$

Жауабы: $\sqrt{3}$

Мысал 3.

Есепте cos2α, егер $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $180^0 < \alpha < 270^0$, α –III ширек бұрышы.

Шығарылуы:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, сонда

$$cos2\alpha = 1 - 2\left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{2 \cdot 144}{169} = 1 - \frac{288}{169} = -\frac{119}{169}$$

Жауабы: $-\frac{119}{169}$

Мысал 4.

Тепе-теңдікті дәлелде: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$

шешуі: $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin 2\alpha = 1$

$1 + \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 1$

$1 = 1$

Тепе-теңдік дәлелденді.

Мысал 5.

Тепе-теңдіктің дұрыстығын тексер.

$\sin 87^0 - \sin 59^0 - \sin 93^0 + \sin 61^0 = \sin 1^0$

$\sin(90^0 - 3^0) - \sin(90^0 + 3^0) - \sin(60^0 - 1^0) + \sin(60^0 + 1^0) =$

$= \cos 3^0 - \cos 3^0 - \sin 60^0\cos 1^0 + \sin 1^0\cos 60^0 + \sin 60^0\cos 1^0 + \sin 1^0\cos 60^0 =$

$= \sin 1^0\cos 60^0 + \sin 1^0\cos 60^0 = \frac{1}{2}\sin 1^0 + \frac{1}{2}\sin 1^0 = \sin 1^0$

$\sin 1^0 = \sin 1^0$, дәлелдеу керегі де осы.

Мысал 6.

Есепте:

$$\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = \frac{2sin20^0 cos20^0 cos40^0 cos80^0}{2sin20^0} =$$

$$= \frac{sin40^0 cos40^0 cos80^0}{2sin20^0} = \frac{2sin40^0 cos40^0 cos80^0}{4sin20^0} = \frac{sin80^0 cos80^0}{4sin20^0} =$$

$$= \frac{2sin80^0 cos80^0}{8sin20^0} == \frac{sin160^0}{8sin20^0} = \frac{\sin(180^0 - 20^0)}{8sin20^0} = \frac{sin20^0}{8sin20^0} = \frac{1}{8}$$

Жауабы: $\frac{1}{8}$

Тригонометриялық өрнектерді түрлендірудің өзіне тән ерекшелігі, ол бір жауапқа әртүрлі жолдармен қол жеткізуге болатындығы.

Тригонометриялық өрнектерді түрлендіру сөз болатын есептерді шешуде берілген өрнекке қолданылған түрлендірулер, тіпті бұл айтылмаған кезде де, тек өрнектің анықталу аймағы шеңберінде орындалады деп есептелінеді.

Есепті орындау барысында қолданылған формулаларды жазу міндетті емес. Олардың қолданылатыны онсыз да түсінікті.

3тарау. «Тригонометриялық теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері»

Осы формуланың қолданылатыны ешқандай күмән тудырмайтын жағдайда есепті орындау барысында қолданылған формулаларды жазу міндетті емес.

Мысал 1.Теңдеуді шеш:

$$4\sin(0{,}5\pi + x) + 3\sin^2 x - 3 = 0$$

$$4\cos x + 3\sin^2 x - 3 = 0$$

$$4\cos x + 3(1 - \cos^2 x) - 3 = 0$$

$$4\cos x + 3 - 3\cos^2 x - 3 = 0$$

$$4\cos x - 3\cos^2 x = 0$$

$$\cos x(4 - 3\cos x) = 0$$

Көбейтінді нөлге тең болуы үшін кем дегенде көбейткіштердің біреуі нөлге тең болуы шарт, мұнда басқа көбейткіштері нөлден өзгеше деп есептеледі.

$\cos x = 0$ немесе $4 - 3\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $3\cos x = 4$

$\cos x = \frac{4}{3},\ \frac{4}{3} \notin [-1;1]$

$x \in \phi$

Жауабы: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Мысал 2.Теңдеуді шеш:

а) $\frac{\cos x - 2}{\cos \frac{x}{2}} = 2$

айнымалының мүмкін мәндер жиынын табамыз:

$cos \frac{x}{2} \neq 0$

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \ \big| \cdot 2$

$x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$

$$\frac{\cos x - 2}{\cos \frac{x}{2}} = 2 \ \Big| \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x - 2 = 2\cos \frac{x}{2}$$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) - 2 - 2\cos \frac{x}{2} = 0$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 - 2\cos \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - 2\cos \frac{x}{2} - 3 = 0$$

Жаңа белгілеу енгіземіз: $\cos\frac{x}{2}=t,\ t\in[-1;1]$

$2t^2-2t-3=0$

$D=b^2-4ac$

$D=2^2-4\cdot2\cdot(-3)=4+24=28$

$t=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{28}}{2\cdot2}=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

$t_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2},$

$t_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Түбірлерді тексереміз:

$2<\sqrt{7}<3 \quad |+1$

$3<\sqrt{7}+1<4 \quad |:2$

$1{,}5<\frac{\sqrt{7}+1}{2}<2$

Яғни, $t_1\notin[-1;1]$

$2<\sqrt{7}<3 \quad |\cdot(-1)$

$-3<-\sqrt{7}<-2 \quad |+1$

$-2<-\sqrt{7}+1<-1 \quad |:2$

$-1<\frac{-\sqrt{7}+1}{2}<-\frac{1}{2}$

$t_2\in[-1;1]$

Жаңа белгілеуге қайта ораламыз:

$cos\frac{x}{2}=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$\frac{x}{2}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi n, n\in Z \ |\cdot2$

$x = \pm 2\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 4\pi n, n \in Z$ - ММЖ тиісті болады

Жауабы: $x = \pm 2\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 4\pi n, n \in Z$

Мысал 3. Теңдеулер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} x - y = \frac{3\pi}{2} \\ 5\cos^2 x = 6\sin\, y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + y \\ 5\cos^2 x = 6\sin\, y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + y \\ 5\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = 6\sin\, y - 1 \end{cases}$$

Екінші теңдеуді шешеміз:

$$5\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = 6\sin\, y - 1$$

$$5\sin^2 y = 6\sin\, y - 1$$

$$5\sin^2 y - 6\sin\, y + 1 = 0$$

Жаңа белгілеу енгіземіз: $\sin\, y = t,\ t_1 \notin [-1;1]$

$$5t^2 - 6t + 1 = 0$$

а=5; в=-6; с=1

а+в+с=0

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = \frac{c}{a};\ t_2 = \frac{1}{5}$$

Жаңа белгілеуге қайта ораламыз:

$$\sin\, y = 1$$

$$y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin\, y = \frac{1}{5}$$

$$y_2 = (-1)^{\kappa} \arcsin\tfrac{1}{5} + \pi\kappa, \kappa \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\\ y_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=\dfrac{3\pi}{2}+(-1)^{\hat{e}}\arcsin\frac{1}{5}+\pi\hat{e}, \hat{e}\in Z\\ y_2=(-1)^{\hat{e}}\arcsin\frac{1}{5}+\pi\hat{e}, \hat{e}\in Z\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=2\pi+2\pi n, n\in Z\\ y_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=\dfrac{3\pi}{2}+(-1)^{\kappa}\arcsin\frac{1}{5}+\pi\kappa, \kappa\in Z\\ y_2=(-1)^{\kappa}\arcsin\frac{1}{5}+\pi\kappa, \kappa\in Z\end{cases}\end{array}\right.$$

Жауабы: $\left(2\pi+2\pi n; \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right), \left(\dfrac{3\pi}{2}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n; (-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n\right), n\in Z$

Мысал 4. Теңсіздікті шеш:

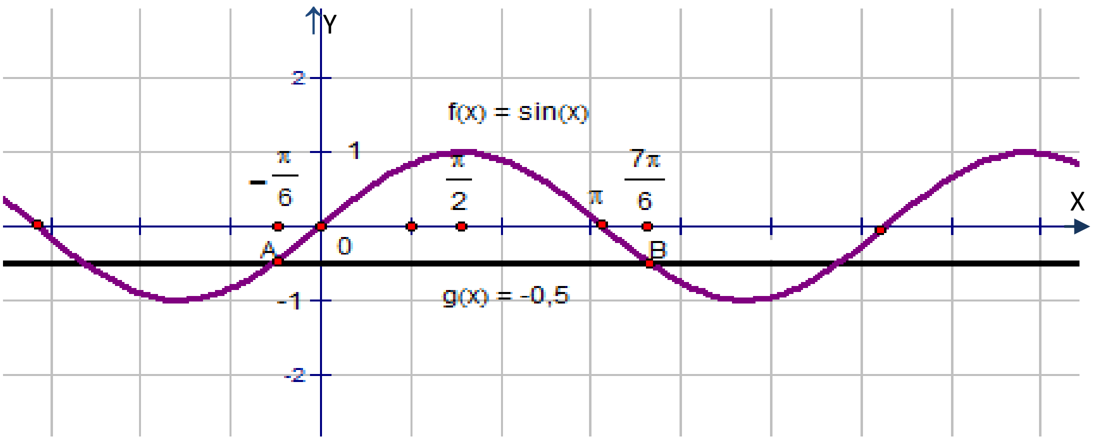
$$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geq -1$$

Теңсіздіктің екі жағын да 2-ге бөліпкелесі мәндес теңсіздікті аламыз:

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geq -\frac{1}{2}$$

Бір координаталық жазықтықта $y=\sin x$ және $y=-\dfrac{1}{2}$ функцияларының графиктерін сызып қарастырамыз.

Графиктен түзу синусойда қисығын шексіз көп нүктелерде қиып өтетіндігін көреміз. Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын синусойданың бөлігі $y=-\dfrac{1}{2}$ түзуінен жоғары орналасқан.



$\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$ екенін ескере отырып $x_1=-\dfrac{\pi}{6}$ және $x_2=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$ мәндерін есептеп табамыз.

Негізгі шешімдері жататын аралық: $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]$. Онда $-\frac{\pi}{6}\le\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{6}$.

$y=\sin x$ фукциясының периодтылығын ескере отырыпкелесі теңсіздікті

аламыз: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

Теңсіздіктің әр бөлігіне $\frac{\pi}{4}$ -ті қосамыз:

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n\le\frac{x}{2}\le\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$\frac{\pi}{12}+2\pi n\le\frac{x}{2}\le\frac{17\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z$$

Теңсіздіктің екі жақ бөлігін де 2-ге көбейтеміз:

$$\frac{\pi}{6}+4\pi n\le x\le\frac{17\pi}{6}+4\pi n,\ n\in Z$$

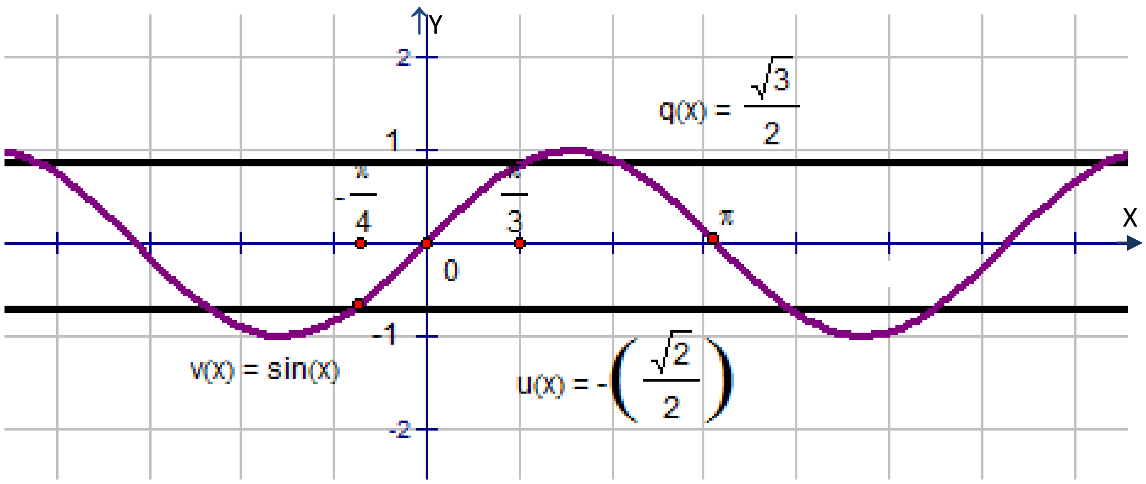
Жауабы: $\left[\frac{\pi}{6}+4\pi n;\frac{17\pi}{6}+4\pi n\right]\ n\in Z$.

Мысал 5. Теңсіздікті шеш:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$$

В одной координатной плоскости построим графики функций $y=\sin x$,

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ және $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ фукцияларының графиктерін бір координаталық жазықтыққа салып қарастырамыз. Түзулер косинусоида қисығын шексіз көп нүктелерде қиып өтетінін көреміз. Берілген теңсіздікті қанағаттандыратын косинусоида қисығының бөлігі $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ және $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ түзулерінің арасында орналасқан .



Учитывая, что $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ және $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ екенін ескере отырып x_1= $-\frac{\pi}{4}$ және x_2=$\frac{\pi}{3}$ мәндерін табамыз.

Негізгі шешімдері жататын аралық: $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$. Онда $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$.

$y = \sin x$ фукциясының периодтылығын ескере отырыпкелесі теңсіздікті аламыз: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Жауабы: $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$ $n \in Z$.

4 тарау. «Туындының геометриялық мағынасы»

Тапсырманы орындау барысында қолданылатынына күмән тудырмайтын формулалардан басқа есептің шығарылуында негізгі формулалар мен сөздік түсініктемелер болып табылатын формулалар мен сөздік түсініктемелерді жазып отыру міндетті.

Мысал 1.

Егер $f(x) = \cos(\pi + x)$ болса, $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ өрнегін нөлмен салыстыр. Келтіру формулаларын қолданып функциянфы түрлендіреміз $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. $f(x) = -\cos x$ аламыз.

Туындыны табамыз $f(x) = -\cos x$.

$f'(x) = (-\cos x)' = \sin\, x$.

$x = \frac{4}{3}\pi$ нүктесіндегі туындының мәнін есептейміз.

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin\frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$. .

Келтіру формулаларын қолданып $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ аламыз.

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Табылған мәнді нөлмен салыстырамыз: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$<0.

Жауабы: $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)$<0.

Мысал 2.

$x(t) = 2t^3 + t^2 - 4$ (см) заңы бойынша түзусызықты қозғалатын нүктенің $t = 4c$ уақыт мезетіндегі жылдамдығы мен үдеуін табыңыз.

Туындының физикалық мағынасынан $\upsilon(t) = x'(t)$ және $\upsilon'(t) = a(t)$ аламыз.

Туындыны табамыз $x(t) = 2t^3 + t^2 - 4$.

$x'(t) = \left(2t^3 + t^2 - 4\right)' = 6t^2 + 2t$.

$\upsilon(t) = 6t^2 + 2t$.

$t = 4$с уақыт мезетіндегі жылдамдығын есептейміз

$\upsilon(4) = 6\cdot 4^2 + 2\cdot 4 = 104$ см/с.

Туындыны табамыз $\upsilon(t) = 6t^2 + 2t$.

$\upsilon'(t) = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2$.

$a(t) = 12t + 2$

$t = 4$с уақыт мезетіндегі үдеуін есептейміз.

$a(4) = 12\cdot 4 + 2 = 50$ см/с^2.

Жауабы: 104см/с; 50 см/с^2.

Мысал 3.

$f(x)=\sqrt{3x+2}$ функциясының графигіне қай нүктеде жүргізілген жанама Ох осьімен $45°$ бұрыш жасайды?

Туындының геометриялық мағынасынан $tg\alpha = f'(x_0)$ білеміз.

Туындыны табамыз $f(x)=\sqrt{3x+2}$.

$$f'(x)=\left(\sqrt{3x+2}\right)' = \left(\left(3x+2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(3x+2\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}.$$

$$tg\,45° = \frac{3}{2\sqrt{3x_0+2}}.$$

$$1 = \frac{3}{2\sqrt{3x_0+2}}.$$

Иррационал теңдеуді шешеміз $2\sqrt{3x_0+2}=3$.

Теңдеудің екі жақ бөлігін де квадраттаймыз.

$4(3x_0+2) = 9.$

$(3x_0+2) = \frac{9}{4}.$

$3x_0 = \frac{9}{4} - 2.$

$3x_0 = \frac{9}{4} - \frac{8}{4}.$

$3x_0 = \frac{1}{4}.$

$x_0 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}.$

$x_0 = \frac{1}{12}.$

Табылған мәнді иррационал теңдеуге қойып тексереміз.

$$2\sqrt{3\cdot\frac{1}{12}+2}=3.$$

$$2\sqrt{3\cdot\frac{1}{12}+2}=2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=2\sqrt{\frac{9}{4}}=2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

$x_0 = \frac{1}{12}$ - теңдеу түбірі болады.

x_0-ге сәйкес y_0 мәнін есептейміз $y_0 = \sqrt{3x_0 + 2}$.

$y_0 = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{12} + 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{12};1\frac{1}{2}\right)$-нүктесінде $f(x) = \sqrt{3x+2}$ функцияның графигіне жүргізілген жанамаOxосьімен 45° бұрыш жасайды.

Жауабы: $\left(\frac{1}{12};1\frac{1}{2}\right)$.

Мысал 4.

$y = \frac{x+1}{x+2}$ функциясының графигіне жүргізілген жанама $y = x+5$ түзуіне параллель болатын нүктені тап.

Егер $y = \frac{x+1}{x+2}$ функциясының графигіне жүргізілген жанама параллельна прямой $y = x+5$ түзуіне параллель болса, онда жанаманың бұрыштық коэффициенті 1-ге тең.

$k = 1.$

Туындының геометриялық мағынасынан $k = y'(x_0)$ аламыз.

$y'(x_0) = 1$.

Туындыны табамыз $y = \frac{x+1}{x+2}$.

$$y' = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{(x+1)'(x+2)-(x+2)'(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

$\frac{1}{(x_0+2)^2} = 1.$

$(x_0+2)^2 = 1.$

$x_0 + 2 = 1$ немесе $x_0 + 2 = -1$.

$x_0 = -1$ немесе $x_0 = -3$.

Сәйкесінше y_0 мәндерін табамыз.

$x_0 = -1$, $y_0 = \frac{-1+1}{-1+2} = 0$. $(-1;0)$.

$x_0 = -3$, $y_0 = \frac{-3+1}{-3+2} = \frac{-2}{-1} = 2$. $(-3;2)$.

$(-1;0), (-3;2)$ нүктелерінде $y = \frac{x+1}{x+2}$ функциясының графигіне жүргізілген жанама $y = x + 5$ түзуіне параллель болады.

Жауабы: $(-1;0)$, $(-3;2)$.

5тарау. «Функцияны зерттеу және графигін салу»

Функцияның анықталу облысын табуда төмендегідей тұжырымдарды басшылыққа аламыз:

1) бүтін рационал функцияның (көпмүше түрінде берілсе) анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны;
2) бөлшек рационал функцияның анықталу облысы бөлшектің бөліміндегі көпмүшені нөлге айналдыратын нүктелер жиынынан басқа барлық нақты сандар жиыны;
3) егер функция иррационал өрнек түрінде берілсе, онда функцияның анықталу облысы түбірдің дәреже көрсеткішіне тәуелді болады, яғни түбірдің дәреже көрсеткіші тақ болса, онда оның анықталу облысы бөлімі нольге айналмайтын барлық нақты сандар жиыны, ал егер түбірдің дәреже көрсеткіші жұп болса, онда түбір астындағы өрнек теріс емес (түбір өрнектің алымында болса) не оң (түбір - бөлімінде) болатын аргументтің мәндер жиыны;
4) егер функция әр түрлі функциялардың алгебралық қосындысы түрінде берілсе, онда оның анықталу облысы қосылғыш функциялардың анықталу облыстарының қиылысуына тең.

Туындының көмегімен кез келген дифференциалданатын f(x) функциясының өсу және кему аралықтарын табу алгоритмі:

1) функцияның анықталу облысын табу;
2) функцияның туындысын табу;
3) f′(x)>0 немесе f′(x)<0 теңсіздігін шешу;

4) берілген теорема бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын жазу.

Функцияны туындының көмегімен зерттеу үшін мына алгоритм қолданылады:

1) функцияның анықталу облысын табу;
2) Функцияның жұп, тақ және периодты екенін анықтау;
3) функция графигінің координаталар осімен қиылысу нүктелерін анықтау;
4) таңбатұрақтылық аралықтарын табу;
5) өсу және кему аралықтарын, экстремумдарын табу;
6) алынған зерттеу нәтижелерін кестеге енгізу;
7) функцияның асимптоталарын табу;
8) функцияның графигін салу;
9) функцияның салынған графигін қолданып, оның мәндер жиынын табу.

Мысал 1.

Функцияны зерттеп және оның графигін сызыңдар: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}$;

Шешуі.

Функцияны зерттеу алгоритмін қолданамыз:

1) Берілген функция рационал функция болғандықтан, анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны, яғни $\mathrm{D}(f) = R$;
2) $f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}$ функция жұп та емес, тақ та емес, периодты да емес.
3) функция графигінің координаталар осімен қиылысу нүктесін табамыз:

   Oy осімен: $x = 0, f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, фунция графигі *Oy* осімен қиылысу нүктесі - $A\left(0; \frac{4}{3}\right)$;

   Ox осімен: $y = 0$, $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3} = 0$

$$\frac{1}{3} \cdot (x^3 - 3x^2 + 4) = 0$$

$$\frac{1}{3}\cdot(x+1)\left(x^2-4x\quad+4\right)=0$$

$$\frac{1}{3}\cdot(x+1)(x-2)\quad^2=0$$

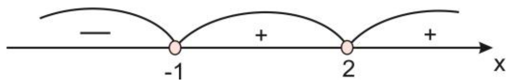
$x+1=0$немесе $(x-2)\quad^2=0$

$$x=-1 x-2=0$$

$$x=2$$

фунция графигі Oxосімен қиылысу нүктелері - $B(-1;\ 0)$ және $C(2;\ 0)$;

4) функция таңбатұрақтылық аралығын анықтау үшін анықталу облысын $x=-1$ және $x=2$ нүктелері арқылы интервалдарға бөліп, функцияның таңбасын анықтаймыз:



Демек, (- ∞; -1) аралығында $f(x)<0$, ал (-1; 2) ∪ (2; +∞) аралығында $f(x)>0$;

5) Өсу,кему аралықтарын, экстремум нүктелерін табамыз.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\right)'=x^2-2x;$$

$f'(x)=0,\qquad x^2-2x=0$

$$x(x-2)=0$$

$x_1=0$ или $\quad x-2=0$

$$x_2=2$$

x_1, x_2сындық нүктелер.

Осы нүктелердің көмегімен анықталу облысын аралықтарға бөлеміз және әр аралықтағы туынды таңбасын интервалдар әдісімен анықтаймыз:

Демек, функция (-∞; 0]∪[2; +∞) аралығында өседі, өйткені$f'(x)>0$, ал [0; 2] аралығында кемиді, өйткені$f'(x)<0$.

Демек, $x \quad = 0$ - максимум нүктесі, $x \quad = 2$ – минимум нүктесі.

Экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін есептейік:

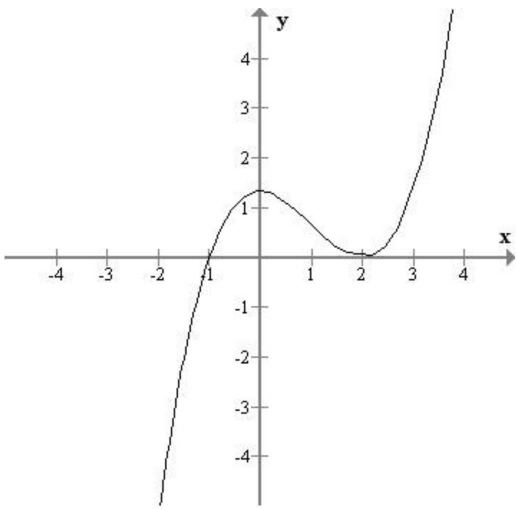
$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}; \quad \left(0; \frac{4}{3}\right);$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - 4 + \frac{4}{3} = 0; \quad (2;\ 0);$$

6) Зерттеу нүктелерін кестеге енгіземіз:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(0;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	бірсарынды өседі	$\frac{4}{3}$	бірсарынды кемиді	0	бірсарынды өседі
экстремум		max		min	

7) Функцияның графигін саламыз:



8) $E(f) = R$.

Мысал 2.

Функцияның анықталу облысын табыңдар: $y = \sqrt{3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3}$;

Шешуі.

$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x} - 3 \geq 0$теңсіздігінің шешімі берілген функцияның анықталу облысы болып табылады.

Квадрат түбірдің анықтамасы бойынша $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x} - 3 \geq 0$, бұл теңсіздікті шешу үшін жаңа айнымалы енгіземіз: $3^{x} = t,$ сонда $t^2 - 2t - 3 \geq 0$ теңсіздігін аламыз. Теңсіздікті интервалдар әдісі арқылы шешеміз.

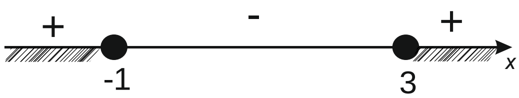
$t^2 - 2t - 3 = 0$ функцияның нөлдерін табамыз,

$$D = b^2 - 4ac, \qquad D = (-2)^{2} - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$,$t_1 = \frac{2-4}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1,$

$$t_2 = \frac{2+4}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Сан осінде белгілеп, интервалдарда функцияның таңбаларын анықтап, таңбасы теңсіздік таңбасына сәйкес интервалдарды аламыз:



$t \epsilon (-\infty;\ -1] \cup [3; +\infty).$

Жаңа айнымалыға қайта оралсақ, $3^{\mathrm{x}} \leq -1$ және $3^{\mathrm{x}} \geq 3$ теңсіздіктерін аламыз, $3^{\mathrm{x}} \leq -1$ болуы мүмкін емес, сондықтан $3^{\mathrm{x}} \geq 3$ теңсіздігінің шешімі берілген теңсіздіктің анықталу облысы болады,

$3^{\mathrm{x}} \geq 3$

$3^{\mathrm{x}} \geq 3^{1}$

$\mathrm{x} \geq 1,\ \mathrm{x} \in [1; +\infty)$

Жауабы:$D(y) = [1; +\infty).$

Мысал 3.

Монотонды аралықтарын анықтаңдар: $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1};$

Шешуі.

Туындының көмегімен кез келген диффереціалданатын функцияның өсу және кему аралықтарын анықтау алгоритмін қолданамыз,

1) бөлшек рационал функцияның анықталу облысы бөлшектің бөліміндегі көпмүшені нөлге айналдыратын нүктелер жиынынан басқа барлық нақты сандар жиыны болғандықтан:

$$x^2 + x + 1 \neq 0$$

$D = b^2 - 4ac,\ D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ демек, функцияның 0-ге тең болатын нүктелері жоқ, графигі жоғары қараған парабола, яғни $D(y) = R$.

2) функцияның туындысын табамыз:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}\right)' = \frac{(2x-3)(x^2+x+1) - (x^2-3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2+2x-3x^2-3x-3-2x^3+6x^2-2x-x^2+3x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4x^2-4}{(x^2+x+1)^2};$$

3) $y' > 0,\ \frac{4x^2-4}{(x^2+x+1)^2} > 0$. Шыққан теңсіздікті интервалдар әдісімен шешеміз. Сонда $4x^2 - 4 = 0, \qquad (x^2+x+1)^2 \neq 0$

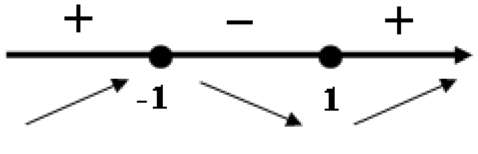
$$4(x^2 - 1) = 0 \quad x^2 + x + 1 \neq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

$x^2 = 1$ 0-ге тең болатын мәндері жоқ

$x = -1,\ x = 1.$

Функцияның анықталу облысын үш интервалға бөліп, әрқайсысының таңбасын анықтаймыз.



Демек, $(-\infty; -1]$ және $[1; +\infty)$ аралығында өседі, $[-1; 1]$ аралығында кемиді.

Жауабы: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ аралығында өседі, $[-1; 1]$ аралығында кемиді.

6тарау. «Берілген кесіндідегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәні»

Көптеген практикалық міндеттерді шешу көбінесе аралықта үздіксіз функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға келіп саяды.Анализ курсында $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз функция осы кесіндіде ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайтындығы тұжырымдалғанВейерштрасстеоремасы дәлелденген, яғни $[a; b]$ кесіндісінде функциянығең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайтын нүктелері бар екендігі дәлелденген.

Кесіндісіндегі функциянығең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін, функцияның берілген кесіндідегі өзгерісін туындының көмегімен зерттейміз.

Ол үшін мына алгоритм қолданылады:

1. Функцияның анықталу облысын табамыз;
2. Функцияның туындысын табамыз;
3. Функцияның сындық нүктелерін табу, яғни $f'(x) = 0$ немесе $f'(x)$ туындысы болмайтын анықталу облысының ішкі нүктелерін табу;
4. Туынды таңбасы тұрақты аралықтарды анықтаймыз, және олардың көмегімен өсу және кему аралықтарын табамыз:

   Егер I аралықта функцияның туындысы $f'(x) > 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы осы аралықта өседі.

   Егер I аралықта функцияның туындысы $f'(x) < 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы осы аралықта кемиді.

5. Функцияның максимум, минимум нүктелерін табамыз.

Максимум нүктесінде функцияның туындысы таңбасын "+"-тен "–"-ке ауыстырады.

Минимум нүктесінде функцияның туындысы таңбасын "–"-тен "+"-ке ауыстырады.

6. Функцияның кесіндінің ұштарындағы мәндерін табамыз.
   - Сонан кейін функцияның кесіндінің ұштарындағы мәндерін және максимум нүктелеріндегі мәндерін салыстырып егер функцияның ең үлкен мәнін табу керек болса олардың ең үлкенін таңдаймыз.
   - Немесе функцияның кесіндінің ұштарындағы мәндерін және минимум нүктелеріндегі мәндерін салыстырып егер функцияның ең кіші мәнін табу керек болса олардың ең кішісін таңдаймыз.

Жоғарыда баяндалған функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу тәсілі әр түрлібағыттағы есептерді шешуде қолданылады. Осындай жағдайларда келесі схема бойынша жұмыс жасалады:

1. Есеп функциялық тілге «аударылады». Бізді қызықтыратын шаманы f(x)функциясы түрінде өрнектеуге мүмкіндік беретін;
2. Талдау арқылы осы функцияның белгілі бір кесіндідегіең үлкен және ең кіші мәндері ізделінеді;
3. Функция тілінде алынған нәтиже (алғашқы есеп терминдерімен) қандай практикалық мағынаға ие екендігі нақтыланады.

Мысал 1.

4 санын екі қосылғышқа, олардың көбейтіндісі ең үлкен мәнге ие болатындай етіп, жікте.

Шешуі.

x – бір қосылғыш болсын. онда (4 – x) – екінші қосылғыш болады..

f(x) = x(4 – x) =4x – x^2

$f'(x)$=4 – 2x

$f'(x)$=0 теңдеуін шешеміз.

4-2x=0

4=2x

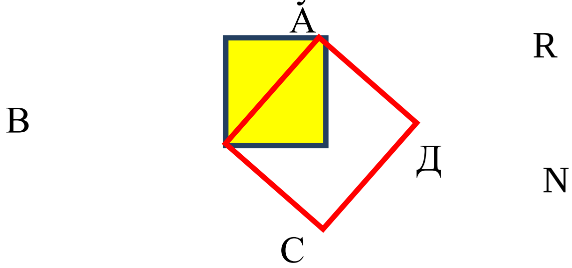
x=2

Жауабы:2;2

Мысал 2

12см тең кесінді берілген. майысқан сымның ұштары қосылған кесінділерде тұрғызылған квадраттың ауданы ең кіші мәнге ие болатындай етіп тік бұрыш жасап майыстыруқажет.

Шешуі.



Берілгені:
AC=12см
$\angle B = 90°$
S_{ACRN}- ең кіші мәні
Табу керек:AB

Шешуі:

AB+BC=12 см

AB=x см болсын, онда BC=12-x болады.

$S_{ACRN} = AC^2$

Пифагор теоремасы бойынша$AC^2 = (12 - x)^2 + x^2$

f(x)=2x^2 -24x+144

$f'(x)$=4x-24

$f'(x)$=0 теңдеуін шешеміз.

4x-24=0

4x=24

x=6

Жауабы: AB=BC=6 см

Мысал 3

$[1; 4]$ кесіндісінде $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешуі.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$

1.D(f): $x \in (-\infty; +\infty)$

2. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 8$

3. Сындық нүктелерді табамыз.

$f'(x)$=0 теңдеуін шешеміз.

$3x^2 - 4x + 8 = 0$

D<0 – Сындық нүктелеріжоқ.

4.Функцияның кесіндінің ұштарындағы мәндері

f (1) =3–4+8=5

f(4)=$3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 8 = 62$

Жауабы: max f(x)=f (4) =62;   min f(x)=f (1) =5

Функцияның экстремумдарын табу алгоритмі:

1. Функцияның анықталу облысын табамыз;
2. Функцияның туындысын табамыз;
3. Функцияның сындық нүктелерін табу, яғни $f'(x) = 0$ немесе $f'(x)$ туындысы болмайтын анықталу облысының ішкі нүктелерін табамыз;
4. Сындық нүктелер $f(x)$ функциясының анықталу облысын бөлетін аралықтардағы туындының $f'(x)$ таңбасын зерттейміз. Егер туынды $f'(x)$ сындық нүктелерден өткенде таңбасын өзгертетін болса, онда функцияның бұл нүктелерде экстремумдары болады. Ал егер туындының $f'(x)$ таңбасы өзгермесе, онда бұл нүктелерде функцияның экстремумдары болмайды.

Мысал 4

$\left(-5; -\frac{1}{5}\right)$ кесіндісіндегі $y = x^3 + 6x^2$ функцияның экстремум нүктелерін тап.

Шешуі.

$y = x^3 + 6x^2$

1.D(f): $x \in (-\infty; +\infty)$

2.$y^I = 3x^2 + 12x$

3.Сындық нүктелерді табамыз.

$f'(x)$=0 теңдеуін шешеміз.

$3x^2 + 12x = 0$

3x(x+4)=0

x=0 немесе x+4=0

x=-4

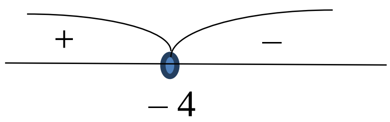
4. x=0 $\notin \left(-5;-\frac{1}{5}\right)$

x= – 4$\in \left(-5;-\frac{1}{5}\right)$

5. Сындық нүктелер $f(x)$ функциясының анықталу облысын бөлетін аралықтардағы туындының $f'(x)$ таңбасын зерттейміз.

$y^{I}(-4{,}5)=6{,}75>0$

$y^{I}(-1)=-9<0$



x= – 4 максимум нүктесі

Жауабы: x = -4 максимум

7тарау. «Алғашқы функция және интеграл. Берілген сызықтармен шектелген фигураның ауданы»

Мектепте оқытылатын математика курсына алғашқы функция және интеграл ұғымдарының енгізілуі оқушылардың алғашқы функция және интеграл ұғымдарын меңгеруіне, сонымен қатар оларды интегралдың қолданылуымен таныстыруға бағытталған.

Мысал 1

Графигі M нүктесі арқылы өтетінf функциясы үшін алғашқы F функцияны табыңдар және егер $f(x)=\cos(2\pi-x), M\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$болса, F функциясының графигін салыңдар.

Шешуі.

f(x) функциясын келесі түрге келтіреміз:

$$f(x)=\cos(2\pi-x)=cosx$$

Алынған функция үшін алғашқы функцияларының жалпы түрі:

$$F(x) = \sin x + C$$

Барлық алғашқы функциялар жиынынан, $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ теңдігін қанағаттандыратын функцияны табамыз.

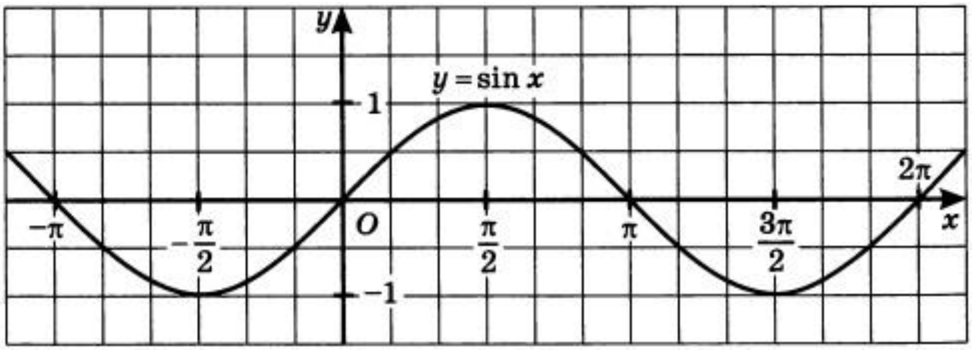
$$-1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$-1 = -\sin\frac{\pi}{2} + C$$

$$-1 = -1 + C$$

C=0

Сонымен, C=0, $F(x) = \sin x$



Анықталған интегралды есептеу барысында интегралды «есептеуді» бастамас бұрын интеграл астындағы функцияның интегралдау кесіндісінде алғашқы функциясы болатындығына көз жеткізу қажет. Түсінбестік туындамас үшін интегралдаудан бұрын берілген функцияның үздіксіз функция болатындығын анықтап алу қажет.

Мысал 2. Интегралды есепте: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x+1)^3 dx$

Шешуі.

Функцияның анықталу облысы $x \in R$ болғандықтан $f(x) = (2x+1)^3$ функциясы интегралдау аралығында үздіксіз функция болады, яғни берілген функция үшін алғашқы функция бар.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^4}{4}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{(2\cdot\frac{3}{2}+1)^4}{8} - \frac{(2\cdot\frac{1}{2}+1)^4}{8} = 32-2=30$$

Жауабы: 30

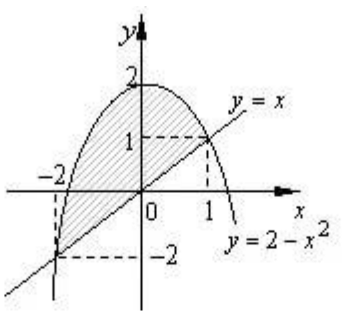
Интегралдың көмегімен фигураның ауданын табуға берілген есептерді шығару барлық жағдайларда қисықсызықты трапецияның ауданын табуға әкеледі. Қисықсызықты трапецияның ауданын бұл фигураларды салмай-ақ есептеп табуға болады. Бірақ бұны оқушылардың кейбірі ғана орындай алады. Сондықтан сызбасын салу қажет. **Сызбаның орындалмауы қате деп есептеледі.**

Мысал 3. $y=2-x^2; y=x$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын есепте:

Шешуі.

Ауданын табуға берілген фигураны саламыз: $y=2-x^2$-функциясы графигі парабола болып табылатын квадраттық функция, тармақтары – төмен бағытталған, (0; 2) –параболаның төбесі; $y=x-$ функциясы тура пропорционалдық функция, графигі –ІжәнеІІІширектердің биссектрисасы болып келетінтүзу.

Графиктің сызбанұсқасын саламыз



Интегралдаудың жоғарғы және төменгі шектерін анықтау үшін $y=2-x^2$ және $y=x$ функцияларының қиылысу нүктелерін табамыз, яғни берілген функциялардың оң жағындағы бөліктерін теңестіреміз және алынған теңдеуді шешеміз.

$2-x^2=x$

$2-x^2-x=0$

$-x^2-x+2=0\,|\cdot(-1)$

$x^2+x-2=0$

$a+b+c=0$ (ерекше жағдайы) болғандықтан, онда $x_1=1; x_2=-2$

Сонымен, $x=-2$–интегралдаудың төменгі шегі, $x=1$ интегралдаудың жоғарғы шегі. На интервале Интегралдаудың $[-2;1]$ интервалында $y=2-x^2$ параболасының графигі $y=x$ түзуінен жоғары жатады, сондықтан фигураныңауданыкелесі анықталған интегралды есептеу арқылы табылады.

$$S_\phi=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx=(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1}=\left(2\cdot1-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)-\left(2\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}\right)=$$

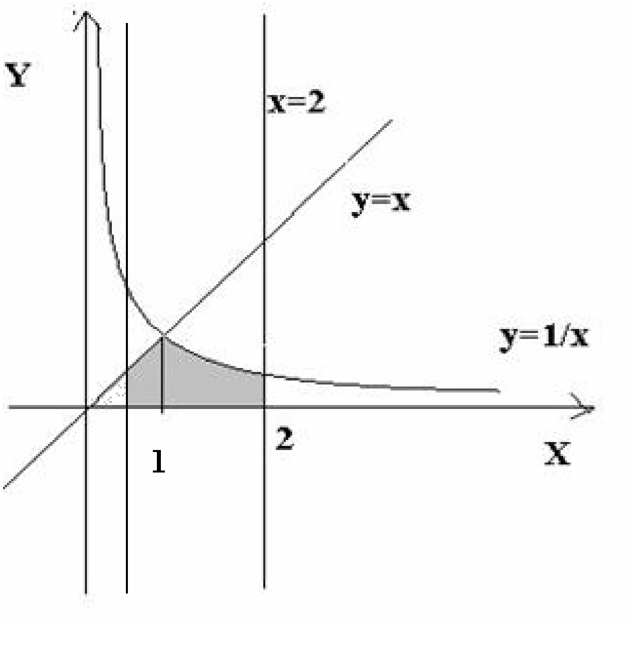
$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2=8-3-\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}\text{ кв.бір.}$$

Жауабы: $4\frac{1}{2}$ кв. бір.

Мысал 4. $y=\frac{1}{x}; y=0; x=\frac{1}{2}; x=2; y=x$ сызықтарымен шектелген фигураны абсцисса осьінне қатысты айналдырғанда шыққан дененің көлемін есептеңдер.

Шешуі.

Графиктің сызбанұсқасын саламыз



Айналу денесінің көлемін оны екі бөлікке бөліп қарастыру арқылы табуға болады: бірінші бөлігі –бұл $y=x$ түзуін $\frac{1}{2}\le x\le 1$ аралығындаабсцисса осьіне қатысты айналдырғанда шыққан қиық конус; екінші бөлігі – $y=\frac{1}{x}$ гиперболасын $1\le x\le 2$ аралығында абсцисса осьіне қатысты айналдырғанда шыққан дене.

$$V_T=V_1+V_2$$

$$V_1=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2dx=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{24}=\frac{7\pi}{24}\text{ куб.бір}$$

$$V_2=\pi\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=-\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}\text{ куб.бір.}$$

$$V_T=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}=\frac{19\pi}{24}\text{куб.бір.}$$

Жауабы: $\frac{19\pi}{24}$ куб.бір

8 тарау. «Алгебралық өрнектерді түрлендіру »

Бұл бөлім көбейткішке жіктеу, бүтін өрнектерді түрлендіру, бөлшек рационал өрнектер, дәреже қасиеттерін қолдану, иррационал өрнектерді түрлендіру есептерінен тұрады. Мектеп бағдарламасында жоқ есептер бар: олар n-ші дәрежелі түбір көрсеткішті және бөлшек дәреже көрсеткішті.

Бұл бөлімдегі тапсырмаларды орындау барысында оқушылар квадрат үшмүшенің түбірлерін таба білу, көпмүшені көбейткіштерге жіктеу тәсілдерін қолдана білу (ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару, қысқаша көбейту формулаларын қолдану, топтау тәсілі, квадрат үшмүшені көбейткішке жіктеу), бүтін өрнектерді түрлендіру ережесі, рационал бөлшектермен амалдар орындау, бөлшектерді қысқарту, бөлшек бөліміндегі иррационалдықтан құтылу, дәреже және арифметикалық квадрат түбірі қасиеттерін білу және оларды есеп шығаруда қолдана білу.

Бұл кезде келесі ұсынымдарды ұстанған жөн:

- ✓ Өрнектерді ықшамдау мен оны түрлендіру тапсырмаларын орындау барысында оқушыларға анықталу облысын табу қажет емес
- ✓ егер тапсырмада өрнектің мәнін табуға берілсе, онда алдымен түрлендіру арқылы өрнекті ықшамдап, содан кейін айнымалының мәнін орнына қойып, есептеуді орындау керек,
- ✓ өрнектерді түрлендіруге берілген тапсырмаларды шешуде, әдетте, көпмүшелерді көбейту ережелерін, қысқаша көбейту формулаларын тізбектей тиімді қолдану арқылы өрнекті ықшамдау. Үздік оқушы ҚКФ-сын

нақты жағдайда тиімді қолдана білу білімін көрсетуі қажет және сәйкес формулаларды қолданбау кемшілік болып табылады,

✓ өрнекті ықшамдау немесе оның мәнін табуда тапсырмаларды жазу формасын оқушы өзі таңдай алады (теңдікті тізбектей орындау, амалдап орындау және т.б.),

✓ тапсырмаларды шешуде кеңейтілген түсіндірмелер көздемейді. Сонымен бірге, оқушыдан жазба жұмыстарын орындауда түрлендіру дәрежесін толық ашып жазуын талап ету, бақылауды тексеру кезінде түрлендіру ретінің логикасын қадағалауға мүмкіндік береді.

Егер бөлімін көбейткішке жіктеу орындалмаса, жақша ашу кезінде таңбадан қателік және топтау тәсілі, формулаларды қолданған кезде қателік, АО табудағы қателіктер, осы бөлімдегі тапсырмаларды шешу кезінде жіберілетін кателіктер болып табылады

$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ модул белгісін ашуда, ҚКФ қолдануда, есептеудегі қателер.

Мысалдар қарастырайық.

Мысал 1. Өрнекті ықшамдау:

$$\frac{\grave{a}^2 - b^2}{2a} \cdot \left(\frac{ab}{\grave{a}^2 - b^2} + \frac{b}{2b - 2a} \right)$$

1 тәсіл

$$1)\left(\frac{ab}{\grave{a}^2 - b^2} + \frac{b}{2b - 2a} \right) = \frac{ab}{(\grave{a} - b)(\grave{a} + b)} - \frac{b}{2(a - b)} =$$

$$= \frac{2ab - b(\grave{a} + b)}{2(\grave{a} - b)(\grave{a} + b)} = \frac{2ab - ab - b^2}{2(\grave{a} - b)(\grave{a} + b)} = \frac{ab - b^2}{2(\grave{a} - b)(\grave{a} + b)} =$$

$$= \frac{b(a - b)}{2(\grave{a} - b)(\grave{a} + b)} = \frac{b}{2(\grave{a} + b)}$$

$$2)\ \frac{\grave{a}^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b}{2(\grave{a} + b)} = \frac{(a - b)(\grave{a} + b)b}{2a \cdot 2(\grave{a} + b)} = \frac{(a - b)b}{4a}$$

2 тәсіл

$$\frac{\grave{a}^2 - b^2}{2a} \cdot \left(\frac{ab}{\grave{a}^2 - b^2} + \frac{b}{2b - 2a} \right) = \frac{(\grave{a}^2 - b^2)ab}{2a(\grave{a}^2 - b^2)} + \frac{(\grave{a}^2 - b^2)b}{2a(2b - 2a)} =$$

$$\frac{b}{2} - \frac{(\grave{a} - b)(a + b)b}{4a(\grave{a} - b)} = \frac{b}{2} - \frac{(a + b)b}{4a} = \frac{2ab - ba - b^2}{4a} = \frac{ab - b^2}{4a}$$

3 тәсіл

$$\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right)=\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\left(\frac{ab}{(a-b)(a+b)}-\frac{b}{2(a-b)}\right)=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{2ab-ab-b^2}{2(a-b)(a+b)}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(ab-b^2\right)}{2a\cdot 2\left(a^2-b^2\right)}=$$

$$=\frac{ab-b^2}{4a}$$

Жауабы: $\frac{ab-b^2}{4a}$

Мысал 2. Өрнекті дәреже түріне келтіру: $\frac{a^{12}+a^8+a^2}{a^{-12}+a^{-6}+a^{-2}}$

$$\frac{a^{12}+a^8+a^2}{a^{-12}+a^{-6}+a^{-2}}=\frac{a^2\cdot\left(a^{10}+a^6+1\right)}{a^{-12}\cdot\left(1+a^6+a^{10}\right)}=\frac{a^2}{a^{-12}}=a^2\cdot a^{12}=a^{14}$$

Жауабы: a^{14}

Мысал 3. Өрнекті ықшамдаңдар: $\sqrt{m^2-2m+1}$, мұндағы $m\le 1$

Шешуі :

$$\sqrt{m^2-2m+1}=\sqrt{(m-1)^2}=|m-1|=-(m-1)=1-m,$$

мұндағы $m\le 1$, онда $m-1\le 0$

Мысал 4. Өрнекті ықшамдаңдар:

$$\left(\frac{2-m}{2+m}-\frac{m+2}{m-2}\right)\div\left(\frac{2+m}{2-m}+\frac{m-2}{m+2}\right)=\left(\frac{2-m}{2+m}+\frac{m+2}{2-m}\right)\div\left(\frac{2+m}{2-m}-\frac{2-m}{m+2}\right)=$$

$$=\frac{(2-m)^2+(2+m)^2}{(2-m)(2+m)}\div\frac{(2+m)^2-(2-m)^2}{(2-m)(2+m)}=\frac{4-4m+m^2+4+4m+m^2}{4-m^2}\div$$

$$\div\frac{(2+m-2+m)(2+m+2-m)}{4-m^2}=\frac{\left(8+2m^2\right)\left(4-m^2\right)}{\left(4-m^2\right)2m\cdot 4}=\frac{2\left(4+m^2\right)}{2m\cdot 4}=\frac{4+m^2}{4m}$$

Жауабы: $\frac{4+m^2}{4m}$

Мысал 5. Өрнекті ықшамдаңдар:

$$\frac{\grave{a}+b}{a^2-4b+4a-b^2}\cdot\frac{16-b^2-\grave{a}^2-2ab}{a^2+ab}=$$

$$1)\ \frac{\grave{a}+b}{\left(a^2-b^2\right)+4(a-b)}=\frac{\grave{a}+b}{(a-b)(a+b+4)}$$

$$2)\ \frac{16-b^2-\grave{a}^2-2ab}{a^2+ab}=\frac{16-\left(\grave{a}^2+2ab+b^2\right)}{a(a+b)}=\frac{16-(\grave{a}+b)^2}{a(a+b)}=$$

$$=\frac{(4-(\grave{a}+b))(4+(\grave{a}+b))}{a(a+b)}=\frac{(4-\grave{a}-b)(4+\grave{a}+b)}{a(a+b)}$$

$$3)\ \frac{(\grave{a}+b)(4-\grave{a}-b)(4+\grave{a}+b)}{(a-b)(a+b+4)a(a+b)}=\frac{4-\grave{a}-b}{a(a-b)}$$

Жауабы: $\frac{4-a-b}{a(a-b)}$

9 тарау. «Алгебралық теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері »

1. D<0.(x+$\frac{b}{2a})^2\geq 0$ *болса, кез* $-$ *келген*x үшін , $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)>0$ *болады* мұндағы $D<0$, *жәнеосыдан*:
   I.егера >0, онда барлықх үшінах^2 + вх + с >0 .
   II.егера <0, онда барлықх үшінах^2 + вх + с <0 .
2. D$=0$.
   I. ах^2 + вх + с >0 *теңсіздігініңкезкелгеншешіміболады*
   х $\neq-\frac{в}{2а}$,егер а >0, ал шешімі болмайды ,егера <0;
   II. егера <0, ах^2 + вх + с <0 теңсіздігініңкезкелгеншешіміболады
   х $\neq-\frac{в}{2а}$, алегера >0 шешімі болмайды ;
   III. егер а >0, *онда*ах^2 + вх + с ≥ 0 теңсіздігініңхкезкелген
   шешімболады ,егера <0; х $=-\frac{в}{2а}$бірғанашешіміболады ,

   IV. егер а <0, ах^2 + вх + с ≤ 0 теңсіздігініңхкезкелген
   шешімболады,жәнеегера >0, ондах $=-\frac{в}{2а}$,.
3. D >0. Квадрат үшмүшені мына түрге келтіруге болады: ах^2 + вх + с = а(х $-$ х$_1$)(х $-$ х$_2$)
4. Айтылғандарды ескереріп, теңсіздікті интервалдар әдісімен шешу үшін нұсқаулық тізімін құрамыз:
   1) Теңсіздіктің сол жағын көбейткіштерге жіктейміз.

2) Теңсіздікті түрлендіргенде , әрбір екімүшенің айнымалысының коэффициенттері+1-ге тең болуы керек.

3) Сан түзуіне, екі мүшені нөлге айналдыратын, айнымалының мәндерін белгілейміз. (Тексеру: 0 және 1нүктелері бұл нүктелерде болмауы керек.)

4) Теңсіздікті қанағаттандыратын нүктені «бояймыз», басқаларын–«ашық» қалдырамыз.

5) Функцияның үздіксіздігінің қасиетін ескере отырып, әрбір аралықтың таңбасын анықтаймыз.

6) Теңсіздікті қанағаттандыратын аралықты штрихтаймыз.

7) Жауабын жазамыз.

Мысал 1. Теңсіздікті шешу $3(x-1)<x-3$

1 – шешутәсілі :

$3(x-1)<x-3$

$3x-3<x-3$

2x<0

x<0

Жауабы: x<0

2 – шешутәсілі :

Теңсіздікті графиктік тәсілмен шешу

$3(x-1)<x-3$

$3x-3<x-3$

2x<0Теңсіздіктің сол жағы аргументі x болатын, 2x сызықтық функцияны y арқылы белгілейміз: y=2x және оның графигін саламыз.

Сызықтық функция ординатасы оң болатын , x аргументінің 2x$>$ 0теңсіздігін қанағаттандыратын түзу.

Жауабы: $(-\infty$;0)

Мысал 2. Теңсіздік шешу $y=\sqrt{36-5x-x^2}$

Шешуі: ММЖ: 36-5x-$x^2\geq 0$,

Егер a – теріс сан болса, онда 36-5x-$x^2>0$ теңсіздігін -1 көбейткенде, $x^2+5x-36<0$. мәндес теңсіздігін аламыз Алдымен $x^2+5x-36=0$ теңдеуін шешеміз,

$D = b^2 - 4ac = 25 + 144 = 169 > 0$, ондах $x^2 + 5x - 36$ квадрат үшмүшенің екі түбірі бар: $x_1 = -9$, $x_2 = 4$. Содан кейін $x^2 + 5x - 36 < 0$ теңсіздігін шешеміз. Сондықтан теңсіздікті (x+9)(x-4) <0 түрде жазуға болады.Охосіне -9 және 4 нүктелерін белгілейміз.(x+9)(x-4) өрнегінің мәні кез келген x үшін 4-тің оң жағында және -9-дың сол жағында оң, ал -9 бен 4-тің аралығында теріс.

Теңдеу мен теңсіздіктің шешімін біріктіру арқылы, теңсіздіктің шешімі $[-9; 4]$ кесінді аралығында болады.

Жауабы: $x \in [-9; 4]$

10 тарау. «Иррационал теңдеулер және оның жүйелері »

Мысал 1.Теңдеу шешіңдер: $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2$

1 тәсіл: $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2$

ММЖ: $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

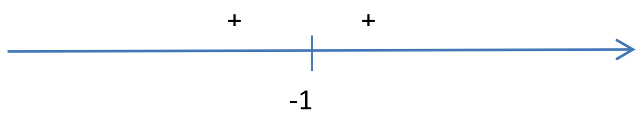
$x^2 + 2x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

$x = -1$



$x \in R$

ММЖ: $x \in R$

$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2 - 1$

$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 3$

Берілген теңдеудің шешімі жүйенің шешімімен мәндес

$\begin{cases} 3x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 = (3x - 3)^2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 9x^2 - 18x + 9 \end{cases}$

$x^2 + 2x + 1 = 9x^2 - 18x + 9$

$-8x^2 + 20x - 8 = 0 | : (-4)$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$
$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \notin [1; +\infty)$$
Жауабы: 2

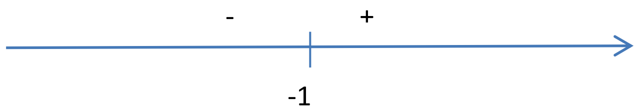
2 тәсіл: $1 + \sqrt{(x+1)^2} = 3x - 2$, $\sqrt{a^2} = |a|$

$1 + |x+1| = 3x - 2$

$3 - 3x + |x+1| = 0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$



Берілген теңдеуді екі аралықта қарастырамыз :

$x \in (-\infty; -1)$

т.к. $x + 1 < 0, то$

$3 - 3x - (x+1) = 0$

$3 - 4x - 1 = 0$

$2 - 4x = 0$

$x = 0{,}5 \ \notin \ (-\infty; -1)$

$x \in [-1; +\infty)$

$т.к.\ \ x + 1 > 0, то$

$3 - 3x + (x+1) = 0$

$4 - 2x = 0$

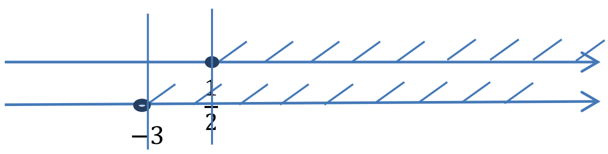
$x = 2 \ \in [-1; +\infty)$

Жауабы: 2

Мысал 2. Теңдеуді шешіңдер: $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{2x-1}$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{2x-1}$$

$$ММЖ: \ \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > -3 \end{cases};$$



$$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Берілген теңдеудің шешімі жүйенің шешімімен мәндес

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \frac{(x+1)^2}{x+3} = 2x - 1 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -1 \\ \frac{x^2 + 2x + 1}{x+3} = \frac{2x-1}{1} \end{cases}; x^2 + 2x + 1 = (2x-1)(x+3)$$

$$x^2 - 2x^2 + 2x - 5x + 4 = 0$$

$$-x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$a=-1 \quad b=-3 \qquad c=4$$

$$егер\,a+b+c=0, онда\,x_1=1,\ \ x_2=\frac{c}{a}$$

$$x_1=1\ \in\left[\frac{1}{2};+\infty\right),\ \ x_2=-4\ \notin[-1;+\infty)$$

Жауабы: 1

Мысал 3.Теңдеуді шешіңдер: $(x+1)\sqrt{5x^2+22x-15}=0$

$$ММЖ: 5x^2+22x-15x\geq 0$$

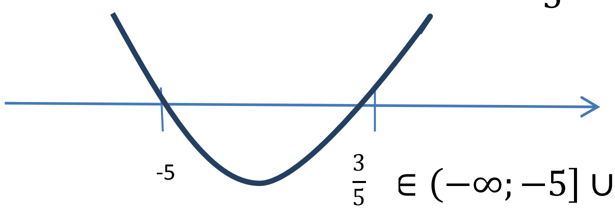
$$5x^2+22x-15=0$$

$$b=2n, онда D=n^2-ac=121-5\cdot(-15)=196$$

$$x_{1,2}=\frac{-n\pm\sqrt{D}}{a}$$

$$x_1=\frac{-11+14}{5}=\frac{3}{5}$$

$$x_2=\frac{-11-14}{5}=-5$$



$\in(-\infty;-5]\cup[\frac{3}{5};+\infty)$

көбейткіштердің біреуі нөлге тең болса, көбейтінді нөлге тең болады, бірақ басқа көбейткіштер бар.

$$x+1=0$$

$$x=-1\ ММЖ$$

қанағаттандырмайды

немесе$\sqrt{5x^2+22x-15}=0$

$$5x^2+22x-15=0$$

$$b=2n, онда D=n^2-ac$$
$$=121-5\cdot(-15)=196$$

$$x_{1,2}=\frac{-n\pm\sqrt{D}}{a}$$

$$x_1=\frac{-11+14}{5}=\frac{3}{5}\in[\frac{3}{5};+\infty)$$

$$x_2=\frac{-11-14}{5}=-5\in(-\infty;-5]$$

Жауабы: -5, $\frac{3}{5}$

Мысал 4.Теңдеуді шешіңдер : $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$

$\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$түбір көрсеткіші тақ , сондықтан $x\in R$теңдіктің екі жағында үшінші дәрежеге шығарамыз

$x^2+14x-16=-64$

$x^2+14x+48=0$

Виеттеоремасыб/ша

$\begin{cases}x_1\cdot x_2=48\\x_1+x_2=-14\end{cases};\begin{cases}x_1=-8\\x_2=-6\end{cases}$

Жауабы: –8;–6

Мысал 5. Теңдеуді шешіңдер: $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$

$$(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$$

$$(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6(x+2), \qquad егерx\neq 2, онда$$

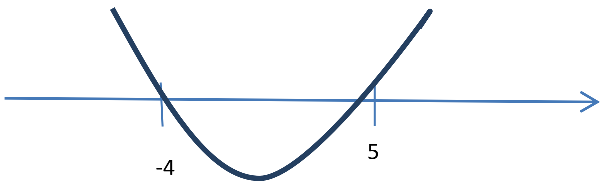
$$(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6(x+2)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-20}=6$$

$$ОДЗ:\ \ x^2-x-20\geq 0$$

$$x^2-x-20=0$$

$$Виеттеоремасыб/ша$$

$$\begin{cases}x_1\cdot x_2=-20\\ x_1+x_2=1\end{cases};\ \begin{cases}x_1=-4\\ x_2=5\end{cases}$$



$$x\in(-\infty;-4]\cup[5;+\infty)$$

теңдіктің екі жағында квадраттаймыз

$$\left(\sqrt{x^2-x-20}\right)^2=6^2$$

$$x^2-x-20=36$$

$$x^2-x-56=0$$

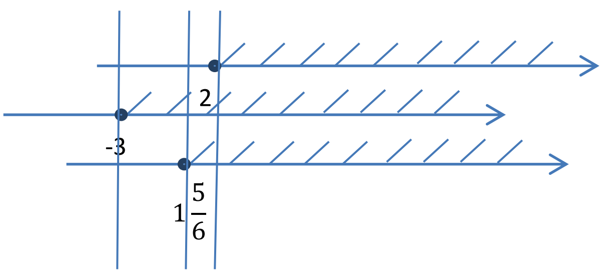
$$Виеттеоремасыб/ша$$

$$\begin{cases}x_1\cdot x_2=-56\\ x_1+x_2=1\end{cases};\ \begin{cases}x_1=-7\in(-\infty;-4]\\ x_2=8\in[5;+\infty)\end{cases};$$

Жауабы: –7; 8

Мысал 6.Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-11}$

$$ММЖ\begin{cases}x-2\geq 0\\ x+3\geq 0\\ 6x-11\geq 0\end{cases};\ \begin{cases}x\geq 2\\ x\geq -3\\ x\geq 1\dfrac{5}{6}\end{cases};$$



$$x \in [2; +\infty)$$

теңдіктің екі жағында квадраттаймыз

$$\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{6x-11}\right)^2$$

$$(\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{(x-2)(x+3)} + (\sqrt{x+3})^2 = 6x - 11$$

Түбірді теңдіктің сол жағында қалдырамыз

$$2\sqrt{(x-2)(x+3)} = 6x - 11 - x + 2 - x - 3$$

$$2\sqrt{x^2 + x - 6} = 4x - 12 \ \vdots 2$$

$$\sqrt{x^2 + x - 6} = 2x - 6$$

Берілген теңдіктің шешімі жүйенің шешімімен мәндес

$$\begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 = (2x-6)^2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x^2 - 25x + 42 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 25x + 42 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 625 - 504 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{25 + 11}{6} = 6 \ \in [2; +\infty)$$

$$x_2 = \frac{25 - 11}{6} = 2\frac{1}{3} \textit{ жүйеніңшешіміболмайды}$$

Жауабы: 6

Мысал 7 Теңдеулер жүйесін шешу: $\begin{cases} 9x + y + 6\sqrt{xy} = 100 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x + y + 6\sqrt{xy} = 100 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases}; \begin{cases} (3\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 100 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases}$$

Берілген жүйенің шешімі біріккен теңдеулер жүйесімен мәндес

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = -10 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Әрбір жүйені ,қосу тәсілін қолданып, шешеміз

$\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases} -$	$\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = -10 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 2 \end{cases} -$
$4\sqrt{x} = 8$	$4\sqrt{x} = -12$
$\sqrt{x} = 2$	$\sqrt{x} = -3$

$x = 4$
$\sqrt{y} - 2 = 2$
$\sqrt{y} = 4$
$y = 16$

Квадрат түбірдің анықтамасын қанағаттандырмайды

Жауабы: (4;16)

Мысал 8. Теңсіздікті шешіңдер. $\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq -1$

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \ ; \ \ g(x) = -1$$

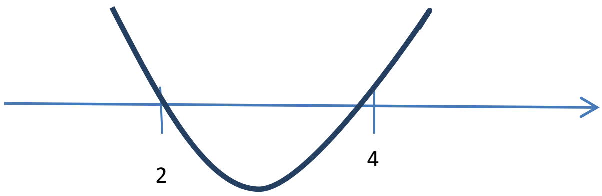
Берілген теңсіздіктің шешімі төмендегі жүйенің шешімімен мәндес

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Виеттеоремасыб/ша

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}; \ \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

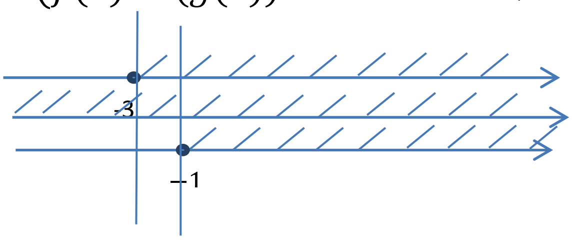
Жауабы: $x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

Мысал 9.Теңсіздікті шешіңдер $\sqrt{x^2 + 3} < x + 3$

$$f(x) = x^2 + 3 \ ; \ \ g(x) = x + 3$$

Берілген теңсіздіктің шешімі төмендегі жүйенің шешімімен мәндес

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}; \ \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 3 \geq 0 \\ x^2 + 3 < (x + 3)^2 \end{cases}; \ \begin{cases} x > -3 \\ x \in R \\ x^2 + 3 < x^2 + 6x + 9 \end{cases}; \ \begin{cases} x > -3 \\ x \in R \\ x > -1 \end{cases}$$



$x \in (-1; +\infty)$

Жауабы: $x \in (-1; +\infty)$

Мысал 10Теңсіздікті шешіңдер: $\sqrt{9x^2 - x - 10} \geq 3x - 2$

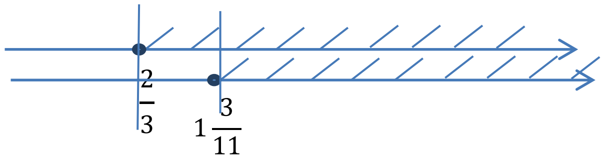
$$f(x) = 9x^2 - x - 10 \;\; ; g(x) = 3x - 2$$

Берілген теңсіздіктің шешімі төмендегі екі жүйенің бірігуімен мәндес

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq \left(g(x)\right)^2 \end{cases} \text{және} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

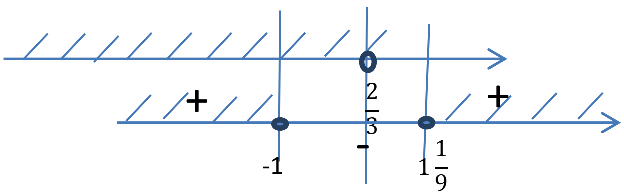
Әрқайсысын жеке жеке шығарамыз

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 9x^2 - x - 10 \geq (3x - 2)^2 \end{cases} ; \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 9x^2 - x - 10 \geq 9x^2 - 12x + 4 \end{cases} ; \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \geq 1\frac{3}{11} \end{cases}$$



$x \in [1\frac{3}{11}; +\infty)$

$$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ 9x^2 - x - 10 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ (x + 1)(9x + 10) \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x \in (-\infty; -1] \cup \left[1\frac{1}{9}; +\infty\right) \end{cases}$$



$x \in (-\infty; -1]$

Жауабы: $x \in [1\frac{3}{11}; +\infty)$и $x \in (-\infty; -1]$

11 тарау. «Көрсеткіштік теңдеу, теңсіздік және олардың жүйелері »

Осы бөлімнің тапсырмасын шеше отырып, оқушылар көрсеткіштік теңсіздіктердің анықтамасын, оны шешудің әдіс тәсілдерін және теңсіздікті әртүрлі тәсілдермен шеше білуі. Оқушыларды осы тақырыпқа байланысты қорытынды аттестацияға дайындау барысында, көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу кезінде көрсеткіштік функциялардың қасиеттерін қолдануға баса назар аударған жөн.

Анықтама: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, мұндағы $a>0$ және $a\neq1$ түріндегі теңсіздік көрсеткіштік теңсіздік болып табылады.
Қарапайым көрсеткіштік теңсіздіктердің түрі
$a^x < b, a^x > b,$ мұндағы $a \neq 1, a > 0$
$b \leq 0$ болса, онда $a^x < b$теңсіздігінің шешімі жоқ ,ал $a^x > b$ теңсіздігі аргументтің кез келген мәнінде орындалады, себебі $a^x > 0.b > 0$ болса, $a^{\log_a b} = b$теңдігі орындалады. Егер $a > 1$болса, онда көрсеткіштік функция өспелі болғандықтан $a^x > b$ теңсіздігі орындалады мұнда $x > \log_a b$-дан болады, ал $x < \log_a b$болса, онда $a^x < b$ теңсіздігі орындалады..Егер $0 < a < 1$, онда көрсеткіштік функция кемімелі болғандықтан $a^x > b$ теңсіздігі $x < \log_a b,$ болғанда орындалады; ал $x > \log_a b$ болғанда $a^x < b$ теңсіздігі орындалады.
Көрсеткіштік функцияның үздіксіздік қасиетін ескере отырып, мынадай қорытындыға келеміз, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ теңсіздігі $a > 1$ болғанда $f(x) > g(x),$ теңсіздігімен бірдей, ал $0 < a < 1$ болғанда $f(x) < g(x)$.теңсіздігімен бірдей болады.
Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу тәсілдері:
- ✓ Теңсіздіктің екі жағында бір негізді дәрежеге келтіру;
- ✓ Жаңа айнымалы енгізу (айнымалыны ауыстыру)
- ✓ Көбейткішке жіктеу;
- ✓ Интервалдар тәсілі .

Мысал 1.
Теңсіздіктің екі жағында бірдей негіздегі дәрежеге келтіру тәсілі :

$$2 \cdot 0,5^{2-3x} \geq 4^{2x-1}$$

Оң және сол жағын негізі 2 болатын дәреже түрінде жазу

$$2\cdot(\tfrac{1}{2})^{2-3x} \geq (2^2)^{2x-1}$$

$$2\cdot2^{3x-2} \geq (2^2)^{2x-1}$$

Дәреженің қасиетін қолданып, ықшамдаймыз

$$2^1\cdot2^{3x-2} \geq 2^{4x-2}$$

$$2^{1+3x-2} \geq 2^{4x-2}$$

$$2^{3x-1} \geq 2^{4x-2}$$

Негізі 2>1 болғандықтан, теңсіздік белгісін өзгертпей , сызықтық теңсіздікті шешуге көшеміз

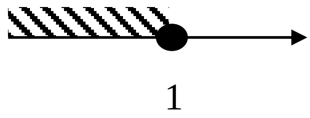
$$3x - 1 \geq 4x - 2$$

3x – 4x≥ – 2+1

– x≥ – 1| ·(–1)

x≤ 1

x∈ (– ∞; 1]



Жауабы: x∈ (– ∞; 1]

Мысал 2

Жаңа айнымалы енгізу тәсілі

$$0{,}04^{x} - 2\cdot 0{,}2^{x} \le 15$$

Теңсіздіктің сол жағын негізі 0,2-нің дәрежесі түрінде жазамыз

$$(0{,}2)^{2x} - 2\cdot 0{,}2^{x} \le 15$$

Айнымалыны ауыстырып, квадрат теңсіздікке келтіреміз.

$0{,}2^{x} = y$ деп алсақ, онда

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 15 \le 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

Теңсіздікті графиктік тәсілмен шешеміз, график тармағы жоғары қараған парабола болып табылады. Параболаның абсцисса осімен қиылысу нүктелерін табамыз:

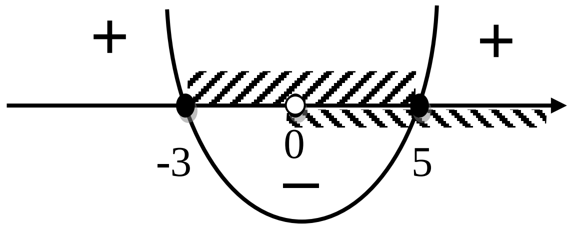
$$y^2 - 2y - 15 \le 0$$

$$a = 1,\ b = -2,\ c = -15$$

келтірілген квадрат теңдеуді Виет теоремасы арқылы шешеміз

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2, \\ y_1 \cdot y_2 = -15; \end{cases} \begin{cases} y_1 = -3, \\ y_2 = 5. \end{cases}$$

Параболаның схемалық сызбасы



Жүйедегі теңсіздіктердің әрқайсысының шешімдерін аралықта көрсетеміз. Жүйенің шешімін жазамыз:

$$0 < y \le 5$$

Көрсеткіштік функцияның қасиетін ескере отырып, бастапқы ауыстыруға келеміз:

$$0{,}2^{x} \le 5$$

Теңсіздіктің оң жағын негізі 0,2-нің дәрежесі түріне келтіреміз

$$0{,}2^{x} \le 0{,}2^{-1}$$

Негізі 0,2<1 болғандықтан, сызықтық теңсіздікке көшкенде теңсіздік белгісі өзгереді

$$x \geq -1$$

$$x \in [-1; +\infty)$$

Жауабы : $[-1; +\infty)$

Мысал 3

Көбейткішке жіктеу тәсілі

$$3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$$

Негіздері бірдей дәрежелерді топтаймыз

$$3^{x^2+2} - 3^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 5^{x^2-1}$$

Оң және сол жақтарының ортақ көбейткіштерін табуда дәреже қасиетін қолданамыз

$$3^{x^2} \cdot 3^2 - 3^{x^2} \cdot 3^{-1} > 5^{x^2} \cdot 5^1 + 5^{x^2} \cdot 5^{-1}$$

Ортақ көбейткішті шығарып, көбейткіштерге жіктейміз

$$3^{x^2} \cdot \left(9 - \frac{1}{3}\right) > 5^{x^2} \cdot (5 + \frac{1}{5})$$

$$3^{x^2} \cdot 8\tfrac{2}{3} > 5^{x^2} \cdot 5\tfrac{1}{5} \quad | : 8\tfrac{2}{3}$$

Негіздері бірдей көрсеткіштік теңсіздікке келеміз:

$$3^{x^2} > 5^{x^2} \cdot \tfrac{3}{5} | : 5^{x^2}, \quad 5^{x^2} \neq 0$$

$$\frac{3^{x^2}}{5^{x^2}} >\cdot \frac{3}{5}$$

Дәреже қасиетін қолданып

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} >\cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1$$

Негізі $\frac{3}{5}$<1 болғандықтан, квадрат теңсіздікке көшкенде теңсіздік белгісін қарама-қарсы белгіге өзгертеміз

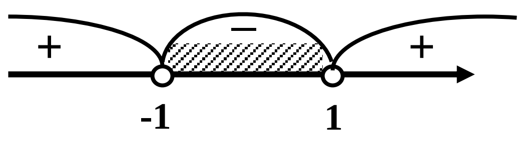
$$x^2 < 1$$

$$x^2 - 1 < 0$$

Интервалдар әдісімен шешеміз

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$



$x \in (-1; 1)$

Жауабы : $(-1; 1)$

Мысал 4 ·

Интервалдар әдісі:

$$\frac{64-4^x}{4x^2+12x+9} \geq 0$$

1) Бөлшектің алымы мен бөлімін нөлге теңестіреміз

$64-4^x=0$

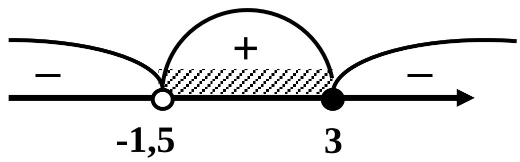
$64=4^x$

$x=3$

2) =0 квадрат теңдеуін толық квадратқа келтіру әдісімен шешеміз
   = 0

$$x=-1.5$$

Табылған x=3 нүктесін берілу шартына сәйкес бояп, ал x = – 1,5 нүктесін бөліміндегі квадрат үшмішенің түбірі болғандықтан боямай сан түзуіне белгілейміз. Нтервалдар тәсілін қолданып таңбаларды қоямыз :



$$x \in (-1{,}5;3]$$

Жауабы: $(-1{,}5;3]$

12тарау. «Логарифмдік теңдеулер, теңсіздіктер және оның жүйелері»

Логарифмдік теңдеулерді шешу үшін мына әдістер қолданылады: логарифм анықтамасын міндетті түрде қолдану; теңдіктің екі жағында бір

негізге келтіру; жаңа айнымалы енгізу; жаңа негізге көшу; мүшелеп логарифмдеу әдісі.

Мысал 1.Теңдікті шеш

$$\log_4(3x-1)-\log_4(4-x)=2-\log_4(x-1)$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-1>0 \\ 4-x>0 \\ x-1>0 \end{cases} => \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x<4 \\ x>1 \end{cases} => 1<x<4$

2 санын қажетті логарифммен ауыстырамыз

$2=\log_4 16$ және $\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$ қасиетін қолданып, нәтижесінде:

$$\log_4(3x-1)+\log_4(x-1)=\log_4 16+\log_4(4-x)$$

$$\log_4\big((3x-1)(x-1)\big)=\log_4\big(16(4-x)\big)$$

Логорифмнен құтылу арқылы:

$$(3x-1)(x-1)=16(4-x)$$

$$3x^2-3x-x+1=64-16x$$

$$3x^2+12x-63=0$$

Берілген теңдікті 3-ке бөлеміз:

$$x^2+4x-21=0$$

Квадраттық теңдік шықты, келтірілген квадрат теңдікті кері Виет теоремасы бойынша:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-4\\x_1\cdot x_2=-21\end{cases}=>\begin{cases}x_1=3\\x_2=-7\end{cases}$$

$$x_2=-7\notin \text{ММЖ}x_1=3\in\text{ММЖ}$$

Жауабы: 3

Мысал 2.Теңдеуді шешіңдер

$$0{,}5\log_3(2x^2+1)=\log_3(2x-1)$$

ММЖ: $2x-1>0$

$$x>\frac{1}{2}$$

$$\log_3(2x^2+1)=2\log_3(2x-1)$$

$$\log_3(2x^2+1)=\log_3(2x-1)^2$$

Логорифмнен құтыламыз:

$$2x^2+1=4x^2-4x+1$$
$$4x^2-4x-2x^2=0$$
$$2x^2-4x=0$$

$$2x(x-2)=0$$

$x_1=0$немесе $x-2=0$

$$x_2=2$$

$$x_1=0\notin\text{ОДЗ}x_2=2\in\text{ОДЗ}$$

Ответ: 2

Мысал 3.Теңдеуді шешіңдер $\log_4(4-x)=0{,}5\log_4(2x+16)$

ММЖ: $\begin{cases}4-x>0,\\2x+16>0;\end{cases}\begin{cases}x<4,\\x>-8;\end{cases}-8<x<4.$

Теңеудің екі жағын 2-ге көбейтеміз, нәтижесінде

$2\log_4(4-x) = \log_4(2x+16)$

$\log_4(4-x)^2 = \log_4(2x+16)$

$(4-x)^2 = 2x+16$

$16-8x+x^2 = 2x+16$

$x^2-10x=0$

$$x(x-10)=0$$

$$x_1 = 0 \text{немесе} x-10=0$$

$x_2 = 10$

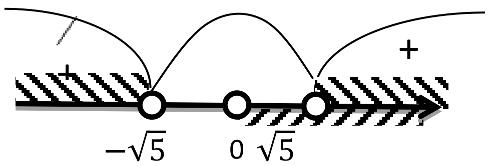
$x_1 = 0 \in$ ММЖ, $\quad x_2 = 10 \notin$ ММЖ

Жауабы: 0

Мысал 4.Теңдеуді шешіңдер

$$\log_{0,2} 4x + \log_5(x^2-5) = 0$$

ММЖ: $\begin{cases} 4x > 0 \\ x^2-5>0 \end{cases} => \begin{cases} x>0 \\ (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})>0 \end{cases}$



x∈($\sqrt{5}$; +∞)

Логарифм негізін 5-ке келтіреміз,

$$\log_{\frac{1}{5}} 4x + \log_5(x^2-5) = 0$$

$$-\log_5 4x + \log_5(x^2-5) = 0$$

$$\log_5(x^2-5) = \log_5 4x$$

Логорифмнен құтылып,

$$x^2-5=4x$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$a=1, b=-4, c=-5$$

Коэффициенттер қасиеті орындалатын болғандықтан

$a - b + c = 0$, онда

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5$$

$$x_1 = -1 \notin \text{ММЖ}$$

$$x_2 = 5 \in \text{ММЖ}$$

Жауабы: 5

Мысал 5.Теңдеуді шешіңдер

$$\log_{0,5}(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4) = -1$$

Логорифм анықтамасымен қолданамыз:

$$\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x + 4 = 0{,}5^{-1}$$

$$\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x + 4 = 2$$

$$\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x + 2 = 0$$

t жаңа айнымалы енгіземізжəне соған байланысты квадрат теңдеуді шешеміз:

$x = \log_2 t$, ондаt²-3t+2=0

a=1, b= – 3, c=2

Коэффициенттер қасиеті орындалатын болғандықтан

a+b+c=0, онда $t_2 = 1$, $t_2 = 2$

x айнымалысына ораламыз жəне қарапайым логорифмдік теңдеуді шешеміз:

$$\log_2 x = 1 \qquad \log_2 x = 2$$

$$x_1 = 2 \qquad x = 2^2$$

$$x_2 = 4$$

Тексеру:

Егерx=2 $\log_{0,5}(\log_2^2 2 - 3\log_2 2$+4)=1

$\log_{0,5}$(1-3+4)= –1

$\log_{0,5}$2= –1

–1= – 1 дұрыс, яғни,*x*=2 теңдікті шешу болып табылады

Егер x=4 $\log_{0,5}(\log_2^2 4 - 3\log_2 4 + 4) = -1$

$\log_{0,5}(2^2 - 3 * 2 + 4) = -1$

$\log_{0,5}$(4-6+4)= – 1

$\log_{0,5}$2= – 1

–1= – 1 дұрыс, яғни, x=4 теңдікті шешу болып табылады.

Жауабы: 2;4

Мысал6.Теңдеуді шешіңдер

$$\log_{\frac{1}{16}} x + \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = -7$$

ММЖ: $x > 0$

Логорифмді бір негізге келтіреміз. Негізі $\frac{1}{2}$-ге тең , нәтижесінде

$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^4} x + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} x + \log_{\frac{1}{2}} x = -7$

$\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = -7$

Ұқсас қосылғыштарды біріктіріп, шыққан теңдеуді шешеміз:

$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)\log_{\frac{1}{2}} x = -7$

$\frac{1+2+4}{4} * \log_{\frac{1}{2}} x = -7$

$\frac{7}{4}\log_{\frac{1}{2}} x = -7$

$\log_{\frac{1}{2}} x = -7 \cdot \frac{4}{7}$

$\log_{\frac{1}{2}} x = -4$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$x=2^4$

x=16

$x = 16 \in$ ММЖ

Жауабы: 16

Мысал7.Теңдеуді шешіңдер $\frac{1}{4-\lg x} + \frac{2}{2+\lg x} = 1$

ММЖ:$\begin{cases} x > 0, \\ 4 - lgx = 0, \\ 2 + lgx \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ lgx \neq 4\,, \\ lgx \neq -2; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 10.000, \\ x \neq 0{,}01. \end{cases}$

x∈(0;0,01) ∪ (0,01;10.000) ∪ (10.000;+∞)

Бөлшектен құтыламыз. Теңдіктін екі жағын ең ең кіші ортақ бөлімге көбейтеміз $(4-\mathrm{lgx})(2+\mathrm{lgx}) \neq 0$, нәтижесінде:

$(2+\lg x)+2(4-\lg x)=(4-\lg x)(2+\lg x)$

$2+\lg x+8-2\lg x=8+4\lg x-2\lg x-\lg^2 x$

$10-\lg x=8+2\lg x-\lg^2 x$

$\lg^2 x-3\lg x+2=0$

t жаңа айнымалы енгіземіз және соған байланысты квадрат теңдеуді шешеміз:

$\lg x=t$ болсын, сонда $t^2-3t+2=0$

$a=1,\ b=-3,\ c=2$

Коэффициенттер қасиеті орындалатын болғандықтана+b+c=0, онда

$t_1=1, t_2=2$

x айнымалының мәнін табамыз: $\lg x=1$ $\lg=2$

$\mathrm{x}_1=10 \in$ ММЖ $\mathrm{x}_2=100 \in$ ММЖ

Жауабы: 10;100

Логорифмдік теңдеулер жүйесін шешу кезінде, көбінесе алгебралық теңдеулер жүйесін шешетін әдістер қолданылады. (алмастыру тәсілі, алгебралық қосу, жаңа айнымалы енгізу және т.б.)

Мысал1. Теңдеулер жүйесін шешіңдер

$$\begin{cases}\log_3(2x+y)+\log_3(2x-y)=1\\ \log_3(2x+y)-\log_3(2x-y)=1\end{cases}$$

Берілген теңдеулерді мүшелерге қоссақ ,

$2\log_3(2x+y)=2$ теңдеуі шығады.

Теңдіктің екі жағын 2-ге бөліп, логарифм анықтамасы бойынша түрлендіреміз

$$\log_3(2x+y)=1$$

$$2x+y=3$$

Алғашқы теңдеулер жүйесі мына трге келеді

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \log_3(2x + y) + \log_3(2x - y) = 1 \end{cases}$$

Бірінші теңдеудегі у айнымалысын х арқылы өрнектейміз : у=3–2х

Екінші теңдеудегі у-тің орнына алынған өрнекті қойып, оны шешеміз:

$$\log_3(2x + 3 - 2x) + \log_3\big(2x - (3 - 2x)\big) = 1$$

$$\log_3 3 + \log_3(4x - 3) = 1$$

$$1 + \log_3(4x - 3) = 1$$

$$\log_3(4x - 3) = 0$$

$$4x - 3 = 1$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 2 \cdot 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

<u>Тексеру:</u>

Егерх=1, у=1 $\begin{cases} \log_3(2 \cdot 1 + 1) + \log_3(2 \cdot 1 - 1) = 1 \\ \log_3(2 \cdot 1 + 1) - \log_3(2 \cdot 1 - 1) = 1 \end{cases};$

$$\begin{cases} \log_3 3 + \log_3 1 = 1 \\ \log_3 3 - \log_3 1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} 1 + 0 = 1 \\ 1 - 0 = 1 \end{cases}; \begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases} - \text{дұрыс,}$$

яғни (1;1) теңдеулер жүйесінің шешімі болып табылады.

Жауабы: (1;1)

Мысал 2. Теңдеулер жүйесін шешіңдер

$$\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8 \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x + y) = 0{,}5 \end{cases}$$

Жүйедегі теңдеулердің әрқайсысын түрлендіретіз:

1) $2^{\log_2(3x-4)} = 8$

Негізгі логарифмдік тепе-теңдіктен мынау шығады :

3х–4=8

3х=12

x=4

2) $\log_9(x^2-y^2)-\log_9(x+y)=0{,}5$

$\log_c a-\log_c b=\log_c\frac{a}{b}$ Логарифм қасиетінен алатынымыз:

$$\log_9\frac{x^2-y^2}{x+y}=0{,}5$$

$\log_9\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}=0{,}5,$

Егер $\mathrm{x}+\mathrm{y}\neq 0\log_9(x-y)=0{,}5$

Логарифм анықтамасынан:

$$\mathrm{x}-\mathrm{y}=9^{0{,}5}$$

$$\mathrm{x}-\mathrm{y}=\sqrt{9}$$

$$\mathrm{x}-\mathrm{y}=3$$

$\begin{cases}\mathrm{x}=4\\ x-\mathrm{y}=3\end{cases};\quad \begin{cases}\mathrm{x}=4\\ 4-\mathrm{y}=3\end{cases};\begin{cases}\mathrm{x}=4\\ \mathrm{y}=1\end{cases}$

<u>Тексеру:</u>

Егерx=4, y=1 $\begin{cases}2^{\log_2(3*4-4)}=8\\ \log_9(4^2-1^2)-\log_9(4+1)=0{,}5\end{cases};$

$\begin{cases}2^{\log_2 8}=8\\ \log_9 15-\log_9 5=0{,}5\end{cases};\quad \begin{cases}8=8\\ \log_9\frac{15}{5}=0{,}5\end{cases};\begin{cases}8=8\\ \log_9 3=0{,}5\end{cases};\begin{cases}8=8\\ 0{,}5=0{,}5\end{cases}$ –дұрыс,

яғни (4;1) теңдеулер жүйесінің шешімі болып табылады.

Жауабы: (4;1)

Мысал 3. Теңдеулер жүйесін шешіңдер $\begin{cases}\log_y x-\log_2 y^2=1\\ \log_4 x-\log_4 y=1\end{cases}$

Жүйедегі теңдеулердің әрқайсысын түрлендіретіз:

1) Жаңа негізге көшу формуласын қолдану арқылы:

$$\log_y x=\frac{\log_2 x}{\log_2 y}$$

Онда теңдеу мына түрге келеді

$$\frac{\log_2 \mathrm{x}}{\log_2 \mathrm{y}}-2\log_2 \mathrm{y}=1$$

Теңдеуді $\log_2 y \neq 0 -$ гекөбейтемізжәне нәтижесінде

$\log_2 x - 2\log_2^2 y = \log_2 y$ теңдеуін аламыз .

2) $\log_4 \frac{x}{y} = 1$

Логарифм анықтамасынан: $\frac{x}{y} = 4$

x=4y

Алныған теңдеулер жүйесін орын алмастыру әдісімен

шешеміз: $\begin{cases} \log_2 x - 2\log_2^2 y = \log_2 y \\ x = 4y \end{cases}$

$\log_c(ав) = \log_c а + \log_c в$ логарифм қасиетінен

$$\log_2 4y = \log_2 4 + \log_2 y = 2 + \log_2 y \log_2 4y - 2\log_2^2 y = \log_2 y$$

$$2 + \log_2 y - 2\log_2^2 y = \log_2 y$$

$$2 - 2\log_2^2 y = 0$$

$$2 \cdot (1 - \log_2^2 y) = 0$$

$$1 - \log_2^2 y = 0$$

$$\log_2^2 y = 1$$

1) $\log_2 y = 1$

y=2, онда $x = -1$

$y = \frac{1}{2}$, онда x=2

$\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

<u>Тексеру:</u>

1) егер x=8, y=2 $\begin{cases} \log_2 8 - \log_2 2^2 = 1 \\ \log_4 8 - \log_4 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3 - 2 = 1 \\ \log_4 \frac{8}{2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$ $-$дұрыс,

яғни (8;2) теңдеулер жүйесінің шешімі болып табылады.

.

2) егер x=2, $y = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_2 (\frac{1}{2})^2 = 1 \\ \log_4 2 - \log_4 \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -\log_2^2 - 2\log_2 \frac{1}{2} = 1 \\ \log_4 \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases}-1+2=1\\ \log_4 4=1\end{cases}$; $\begin{cases}1=1\\ 1=1\end{cases}$ –дұрыс, яғни $(2;\frac{1}{2})$ теңдеулер жүйесінің шешімі болып табылады.

Жауабы: (8;2), $(2;\frac{1}{2})$.

Логарифмдік теңсіздіктерді шешу, көбінесе $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $(\log_a f(x) \geq \log_a g(x))$ немесе $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ $(\log_a f(x) \leq \log_a g(x))$ түріндегі теңсіздіктер шешуге әкеледі

Бұндай теңсіздіктерді шешу үшін логарифмдік функцияның анықталу облысы мен оның қасиеттерін ескере отырып, келесі ережелерді қолдану қажет болады.

1) Егер a$>$ 1болса, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі мына теңсіздіктер жүйесіне мәндес:

$$\begin{cases} f(x) > 0,\\ g(x) > 0,\\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

2) Егер 0 <a<1 болса, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$теңсіздігі мына теңсіздіктер жүйесіне мәндес:

$$\begin{cases} f(x) > 0,\\ g(x) > 0,\\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Сондай-ақ, логарифмдік теңсіздіктерді шешу кезінде логарифмдік қасиеттер қолданылады.

Мысал 1. Теңсіздікті шешіңдер.

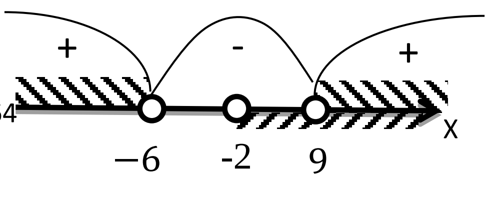
$\log_{0.2}(x^3+8) - 0.5\log_{0.2}(x^2+4x+4) < \log_{0.2}(x+58)$ ОДЗ: $\begin{cases}x > -58\\ x > -2\end{cases}$ => x > –2

$\log_{0.2}(x^3+8) - 0.5\log_{0.2}(x+2)^2 < \log_{0.2}(x+58)$

$\log_{0.2}(x^3+8) - \log_{0.2}\sqrt{(x+2)^2} < \log_{0.2}(x+58)$

$\log_{0.2}\frac{x^3+8}{x+2} < \log_{0.2}(x+58)$

$x^2-2x+4 > x+58$



$x^2 - 3x - 54 > 0$

$x_1 = 9$

$x_2 = -6$ $\qquad\qquad$ $x \in (9; +\infty)$

Жауабы: (9; +∞)

Мысал 2. Теңсіздікті шешіңдер.

$\log_{0.5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3} < 0$ $\qquad\qquad$ $0 = \log_{0.5} 1$

$$\log_{0.5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3} < \log_{0.5} 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > 0, \\ \log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > 1, \text{т.к. } 0 < 0.5 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > 1$ $\qquad\qquad$ $1 = \log_8 8$

$$\log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > \log_8 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+8x}{x-3} > 0 \\ \frac{x+8x}{x-3} > 8, \ \text{т.к } \ 8 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2+8x}{x-3} > 8$$

Шыққан теңсіздікті шешеміз:

$$\frac{x^2+8x}{x-3} > 8$$

$$\frac{x^2+8x}{x-3} - 8 > 0$$

$$\frac{x^2+8x-8x+24}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2+24}{x-3} > 0$$

x-тің кез-келгенмәнінде $x^2 + 24 > 0$, онда

$x - 3 > 0$

$x > 3$

$x \in (3; +\infty)$

Жауабы : (3; +∞)

Мысал 3. Теңсіздікті шешіңдер.

$$\frac{\log_{0,2}(2-5x)}{\log_{0,2}625} < 0$$

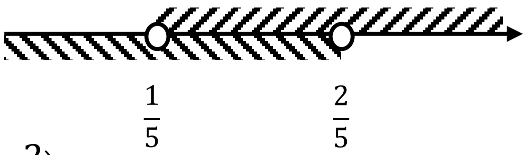
Егер бөлшектің алымы мен бөлімі қарама-қарсы таңбада болса, бөлшек теріс мәнге ие болады. Яғни, кез-келген x-тің мәніндe$\log_{0,2}625 < 0$, онда

$$\log_{0,2}(2-5x) > 0$$

0 санын негізі 0,2-ге тең логарифммен ауыстырамыз: $0 = \log_{0,2}1$

$$log_{0,2}(2-5x) > \log_{0,2}1 <=> \begin{cases} 2-5x > 0 \\ 2-5x < 1, \text{т.к.}\ 0 < 0{,}2 < 1 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} 5x < 2 \\ 5x > 1 \end{cases} => \begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > \frac{1}{5} \end{cases}$$



$$x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Жауабы:$\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$

Мысал 4. Теңсіздікті шешіңдер.

$$0{,}04 > 25^{\log_{25}(2-5x)}$$

ММЖ: $2-5x > 0$

$5x < 2$

$x < 0{,}4$

Негізгі логарифмдік тепе-теңдіктерді қолдану арқылы, сызықтық теңсіздікті аламыз және оны шешеміз:
0,04> 2-5x
5x> 2 - 0,04
5x> 1,96
x> 0,392

Берілген логарифмдік теңсіздіктің шешімін табу үшін, сызықтық теңсіздік шешімін және ММЖ-нын координаталық түзуінде кескіндейміз, және ортақ аралықты табамыз:

$x\epsilon(0{,}392\ ;0{,}4)$

Жауабы:$(0{,}392\ ;0{,}4)$

Мысал 5. Теңсіздікті шешіңдер.

$$\log_{\frac{1}{2}}^{2}(3x+1) > 6-\log_{2}(3x+1)$$

Негіздері бірдей, $\frac{1}{2}$–ге тең, логарифмге келетіреміз :

$$\log_{2}(3x+1) = -\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$$

Сонда алатынымыз:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{2}(3x+1) > 6+\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$$

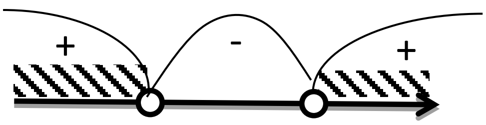
$$\log_{\frac{1}{2}}^{2}(3x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 6 > 0$$

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = t$ белгілеу енгіземіз,сонда

$t^2 - t - 6 > 0$ аламыз

Осы квадрат теңсіздікті интервалдар әдісімен шешеміз:

$$t^2 - t - 6 = 0, \qquad t_1 = 3,\ \ t_2 = -2$$



$t < -2, \qquad t > 3$

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$-ті t–ның орнынақоямыз, осыдан шығады

1) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < -2$ $\qquad -2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}}4$

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{2}}4 <=> \begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x+1>4, \text{т.к.}\ 0<\frac{1}{2}<1 \end{cases}$ => $3x+1>4$

$3x>3$

$x>1$

$x \in (1;+\infty)$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 3$ $\qquad 3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} <=$$

$$> \quad \begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x+1<\frac{1}{8}, \text{т. к. } 0<\frac{1}{2}<1 \end{cases} <=$$

$$> \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ 3x<-\frac{7}{8} \end{cases} <=> \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ x<-\frac{7}{24} \end{cases} <=> \quad -\frac{1}{3}<x<-\frac{7}{24}x$$

$$\in\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{24}\right)$$

Жауабы:$\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{24}\right)\cup(1;+\infty)$

Мысал 6. Теңсіздікті шешіңдер.

$$\log_{0,1}(x-2)-\lg x > \log_{0,1}3$$

Негіздері бірдей, 0,1–ге тең, логарифмге келетіреміз : $\lg x = -\log_{0,1}x$

Бұдан:

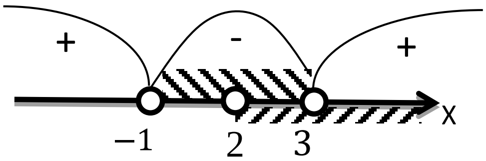
$$\log_{0,1}(x-2)+\log_{0,1}x > \log_{0,1}3$$

$\log_c a + \log_c в = \log_c(ав)$қасиетін қолданып, алатынымыз:

$$\log_{0,1}\big(x(x-2)\big) > \log_{0,1}3 \quad <=> \begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \\ x(x-2)<3, \text{т. к. } 0<0,1<1 \end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases} x>2 \\ x>0 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} <=> \begin{cases} x>2 \\ (x-3)(x+1)<0 \end{cases}$$

Координаттық түзудегі теңсіздіктер жүйесінің әрбір теңсіздігінің шешімін сала отырып, олардың ортақ бөлігін табамыз:



$x\epsilon(2;3)$

Жауабы: (2;3)

Мысал 7. Теңсіздікті шешіңдер.

$$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} > 1$$

$$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} - 1 > 0$$

Теңсіздіктің сол жақ бөлігінің бөлімін $\lg x - 1$ келтірсек, сонда:

$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3 - \lg x + 1}{\lg x - 1} > 0$ шығады

$$\frac{\lg^2 x - 4\lg x + 4}{\lg x - 1} > 0$$

$$\frac{(\lg x - 2)^2}{\lg x - 1} > 0$$

$$\frac{(\lg x - 2)^2}{\lg x - 1} > 0$$

Егер бөлшектің алым мен бөлімінің таңбасы бірдей болса, онда бөлшектің мағынасы оң болуы мүмкін. Қандайда болмасын $x > 0$ болғандықтан $(\lg x - 2)^2 > 0$,онда

1) $\lg x - 1 > 0$

   $\lg x > 1$ 1=lg10

$$\lg x > \lg 10 <=> \begin{cases} x > 0 \\ x > 10, \text{т.к } 10 > 1 \end{cases} <=> x > 10$$

2) $\lg x - 2 \neq 0$

   $\lg x \neq 2$ $2 = \lg 100$

$$\lg x \neq \lg 100$$

$$x \neq 100$$

Осы екі жағдайды ескере отырып, $x\epsilon(10; 100) \cup (100; +\infty)$ деген қортындыға келеміз:

Жауабы: $(10; 100) \cup (100; +\infty)$

Мысал 8. Теңсіздікті шешіңдер.

$\log_2 \frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$

0 санын негізі 2 болатын логарифммен ауыстырамыз:

$$0 = \log_2 1$$

Мынандай теңсіздікті аламыз:

$$\log_2 \frac{x^2 - 1}{(x-2)^2} > \log_2 1 <=> \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{(x-2)^2} > 0 \\ \frac{x^2 - 1}{(x-2)^2} > 1, \text{т.к } 2 > 1 \end{cases} <=> \frac{x^2 - 1}{(x-2)^2} > 1$$

$$\frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 1$$

$$\frac{x^2-1}{(x-2)^2} - 1 > 0$$

$$\frac{x^2-1-(x-2)^2}{(x-2)^2} > 0$$

$$\frac{x^2-1-x^2+4x-4}{(x-2)^2} > 0$$

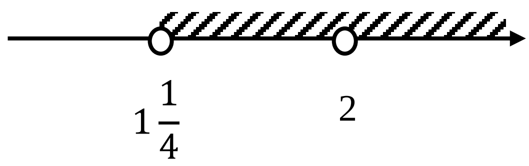
$$\frac{4x-5}{(x-2)^2} > 0$$

Егер бөлшектің алым мен бөлімінің таңбасы бірдей болса, онда бөлшектің мәні оң болады, ал бірақ $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$болғандықтын, мынау шығады

$$4x-5 > 0$$

$$4x > 5$$

$$x > 1\frac{1}{4}$$



$$x \in \left(1\frac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$$

Жауабы: $\left(1\frac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Глава 13. «Аралас теңдеулер жүйесі»

Бұл бөлімде екі айнымалысы бар иррационалдық, логарифмдік және көрсеткіштік теңдеулердің жүйелерін шешудің негізгі тәсілдерін қарастырамыз.

Теңдеулер жүйесін шешу әдістеріне көшпестен бұрын, жүйеге енген теңдеудегі әр түрлі функциялардың негізгі анықтамалары мен қасиеттерін ескеру қажет. Егер әр теңдеудің шешімі болып табылатын айнымалылардың мәнін табу мақсаты қойылса, онда екі белгісізі бар екі теңдеу теңдеулер жүйесін құрайтынын еске түсіреміз.

Жүйедегі айнымалыларға сәйкес алмастырулар қолдану арқылы, дұрыс сандық теңсіздіктер шығатын болса, онда екі белгісізді екі теңдеулер жүйесін шешуді реттелген сандар жұбы деп атаймыз. Теңдеулер жүйесін шешу –

оның барлық шешімдерін табу болып табылады. Теңдеулер жүйесін шешу барысын да, теңдеуді шешу сияқты, жүйелі түрлендірулер жүргізу арқылы күрделіден , біртіндеп қарапайым түрге көшуден тұрады. Көбінесе бастапқы жүйеге сәйкес келетін түрлендірулер жүргізу арқылы шешілетін болса, онда , бұндай жағдайларда табылған шешімдерді тексеру қажет етпейді. Егер

сәйкес түрлендірулер қолданылмаса,онда табылған шешімдерді міндетті түрде тексеруқажет.

. Иррационалдық теңдеулер жүйесін шешу барысында негізгі екі әдіс қолданылады:

1) теңдеулердің екі бөлігінде бір дәрежеге шығару;
2) жаңа айнымалыларды енгізу.

Иррационалдық теңдеулер жүйесін бірінші әдіспен шешуде, теңдіктің екі жағыда жұп түбір көрсеткішті болса , онда теңдеудің екі жағын да дәрежелеп, бастапқы теңдеудің салдары болатындықтан, шешу барысында бөгде шешім кездесетінін ұмытпау керек. Иррационал теңдеулерді шешу барысында $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n$ = f(x) формуласы жиі қолданылады және n жұп болса, анықталу облысын кеңінен қолдану керек. Сол себепті көп жағыдайда иррационал теңдеулер жүйесін шешкенде, тексеру жұмыстарын жүргізу қажет.

Логарифмдік және көрсеткіштік функциялардың негізгі қасиеттері:

1. Функцияның анықталу облысы $y = a^x$, бұл жерде $a > 0,\ a \neq 1$- барлық нақты сандар жиыны; функциялар $y = \log_a x$, бұл жерде $a > 0,\ a \neq 1$- оң нақты сандар жиыны.

2. Функция мәндерінің жиыны $y = a^x$ - оң нақты сандар жиыны; функция $y = \log_a x$ - барлық нақты сандар жиыны.

Монотондық аралықтары: егер $a > 1$ болса, екі функция да өседі; егер $0 < a < 1$ болса, екі функция да кемиді.

Ескерту. Екінші қасиетке сәйкес, логарифмдік теңдеулерді шешу кезінде теңдеудің мүмкін мәндер облысын анықтау қажет немесе шешім шығарғаннан кейін тексеру. Көрсеткіштік теңдеулер жүйесін шешу кезінде, алгебралық теңдеулер жүйесін шешудегі тәсілдер қолданылады(алмастырып қою тәсілі, қосу тәсілі, жаңа айнымалыларды енгізу тәсілі). Көп жағдайларда, берілген шешу әдістерін қолданбастан бұрын, жүйенің әр теңдеуіне мүмкіндігінше жеңіл шешу жолын қолданған жөн.

Мысал 1 Теңдеулер жүйесін шешу

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ (3y-4)^2 = 4 \end{cases}$$ жүйедегі 1-теңдеуді бір негізге келтіреміз.

2-ші теңдеудің сол жағын қысқаша көбейту формуласын қолдану арқылы ықшамдаймыз.

$$\begin{cases} y + 2x = 4, \\ 9y^2 - 24y + 16 - 4 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 9y^2 - 24y + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 3y^2 - 8y + 4 = 0. \end{cases}$$

2– теңдеуді шешеміз: D= $в^2$–4ac= 64–48=16

$y_{1,2}=\frac{-в \mp \sqrt{Д}}{2a}$, $y_1=\frac{8-\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$y_2=\frac{8+\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}=2$

у-тің мәнін 1- теңдеудегі у-тің орнына қоямыз және х мәнін табамыз:

$\frac{2}{3}=4-2x$, 2х=4–$\frac{2}{3}$, 2х=$\frac{10}{3}$, х=$\frac{10}{3}:2$, х= $\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{5}{3}$

2=4-2х, 2х=2, x_2=1.

$x_1=\frac{5}{3}$, x_2=1 $y_1=\frac{2}{3}$, y_2=2,

х және у мәндерін теңдеу жүйесіне қойып, тексереміз.

$$\begin{cases} \frac{2}{3} + 2\cdot\frac{5}{3} = 4, \\ (3\cdot\frac{2}{3} - 4)^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} 2 + 2\cdot 1 = 4, \\ (3\cdot 2 - 4)^2 = 4; \end{cases}$$

Жауабы: $(\frac{5}{3};\frac{2}{3})$, (1; 2).

Мысал 2. Теңдеулер жүйесін шешу

$$\begin{cases} \log_5(4x^2 - 4xy + y^2) = 0, \\ \log_{\sqrt{5}}(2x+y) = 2\,; \end{cases}, \quad \begin{cases} \log_5((2x-y)^2) = 0, \\ \log_{\sqrt{5}}(2x+y) = 2\,; \end{cases}.$$

Анықтау облысын табамыз: 2х>-у

Логарифм анықтамасын қолданып, екі белгісізді теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} (2x-y)^2 = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Жүйені екі тәсілмен шешеміз:

1. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 5' \end{cases}$

4х =6

х=1,5

у=2

2. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

4x = 4

x=1

y=3

Жауабы: (1,5; 2); (1; 3).

Мысал 3. Теңдеулер жүйесін шешу

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+3} = 7 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

Бірінші теңдеудің екі жағын да квадраттаймыз

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)} + 2x + y + 3 = 49 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)} + 3x + 2y + 3 = 49 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

Теңдеудің шыққан мәнін біріншіге қоямыз:

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)} + 22 + 3 = 49 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)} = 24 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+y)(2x+y+3)} = 12 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

Бірінші теңдеуді квадраттаймыз, екіншісінде у-ті х арқылы өрнектейміз

$$\begin{cases} (x+y)(2x+y+3) = 144 \\ y = \frac{22-3x}{2} \end{cases}$$

Бір белгісізді теңдеуді алмастыру әдісімен шешеміз :

$$\left(x + \frac{22-3x}{2}\right)\left(2x + \frac{22-3x}{2} + 3\right) = 144$$

(2x+22-3x)(4x+22-3x+6)=576

(22-x)(x+28)=576

$-x^2+22x-28x+616-576=0$

$x^2+6x-40=0$

Теңдеулердің шыққан түбірлері төмендегідей :

x_1=-10, соответсвует y_1=26

x_2=4, соответсвует y_2=5

Жауабы: (-10; 26), (4; 5)

14 тарау . «Мәтінді есептер»

Мәселе есептерді шығаруда көптеген оқушыларда қиындықтар туындайды. Мәселе еспетер шешуде нақты әдістер жоқ, бірақ осындай есептер шешу кезінде келесі үлгілерді ұстауға болады:

1) Белгісізді таңдау керек. Көп жағдайларда белгісіз ретінде есептегі ізделінді шаманы алып, теңдеу құрған жеңілдеу, кейде басқа да өлшемдерді табу арқылы содан кейін ғана ізделінді шаманы табу мүмкін болады.
2) Теңдеу құрастыру. Теңдеу немесе теңдеулер жүйесін құру барысында есептің барлық шарттарын қолданған қажет. Теңдеу саны белгісіз санымен бірдей болуы керек.
3) Қажет белгісізді немесе белгісіздер комбинациясын табу.

Егер кейбір түбірлерден құтылу қажет болса, онда есеп шартына сүйену қажет. .

Мәселе есептерді төмендегідей топтастырған ыңғайлы:

А) қозғалысқа берілген есептер;

Б) жұмыс және еңбек өнімділігіне берілген есептер;

В) концентрация және пайыздық құрамға берілген есептер;

Г) пайызға берілген есептер.

А) Қозғалысқа берілген есептер

Мұндай есеп түрлерін негізгі құраушылары:

S – жүрілген жол;

V – жылдамдық;

t – қозғалыс уақыты болып табылады.

1. Түзу бойымен бірқалыпты қозғалыс.

Мысал 1

Ара-қашықтығы 124 км, екі темір жол бекетінен, бір уақытта екі поезд қарама-қарсы жолға шығып, 1 сағ 15 мин уақыттан кейін поездардың ара қашықтығы 369 км болды. 1-ші поезд жылдамдығы 2-ші поезд жылдамдығына қатынасы 3:4 болады. Әрбір поездардың жылдамдығын тап.

1 тәсіл):

x – пропорционалдық коэффициенті болса , онда 1-ші поезд жылдамдығы 3x км/сағ, ал екіншінікі 4x км/сағ. Сонда 1-ші поезд за 1 сағ 15 минут = 1,25 сағ, $3x\cdot1{,}25 = 3{,}75x$ (км) жол жүрді, ал 2-ші поезд $4x\cdot1{,}25 = 5x$ (км).

Есеп шарты бойынша қозғалысқа дейінгі поездардың арақашықтығы 124 км, ал 1,25 сағ-тан кейін 369 км болды, теңдеу құрамыз:

$3x\cdot1{,}25 + 4x\cdot1{,}25 = 369 – 124$

$3{,}75x + 5x = 245$

$8{,}75x = 245$

$x = 28$

Онда 1-ші поездың жылдамдығы– $28\cdot3 = 84$ (км/сағ), ал екіншінікі – $28\cdot4 = 112$ (км/сағ)

Жауабы: 84 км/сағ, 112 км/сағ

2 тәсіл таблицалық:

1 сағ 15 мин = 1,25 сағ

x км 1 бөлікке келсін:

	V, км/сағ	t, сағ	S, км
1 поезд	3x	1,25	$3x\cdot1{,}25$
2 поезд	4x	1,25	$4x\cdot1{,}25$

Есеп шарты бойынша қозғалысқа дейінгі поездардың арақашықтығы 124 км,ал 1,25 сағ-тан кейін 369 км болды, теңдеу құрамыз:

$3x\cdot1{,}25 + 4x\cdot1{,}25 = 369 – 124$

$3{,}75x + 5x = 245$

$8{,}75x = 245$

$x = 28$

Онда 1-ші поездың жылдамдығы– $28\cdot3 = 84$ (км/сағ), ал екіншінікі – $28\cdot4 = 112$ (км/сағ)

Жауабы: 84 км/сағ, 112 км/сағ

2. Өзен бойымен қозғалыс.

Мысал 2

Катер өзен ағысымен 6 сағ уақытта А айлақтан В айлағына барды. Өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ. Қайтар жолда катер өзен ағысына қарсы жүріп 7 сағ уақыт жұмсады. Катердің меншікті жылдамдығын тап.

1 тәсіл:

Катердің меншікті жылдамдығы x (км/сағ), $x > 2$

	V, км/сағ	t, сағ	S, км
Ағысқа қарсы	x-2	7	7(x-2)
Ағыс бойымен	x+2	6	6(x+2)
Ағынсыз су	x		
Өзен ағысы	2		

Бір жолға катер өзен ағысымен 6 сағ, ал ағысқа қарсы 7 сағ уақыт жұмсағаны белгілі.Теңдеу құрамыз:

$7(x-2) = 6(x+2)$

$7x - 14 = 6x + 12$

$7x - 6x = 12 + 14$

$x = 26$

Меншікті жылдамдығы - 26 км/сағ

Жауабы : 26 км/сағ

2 тәсіл:

Катердің меншікті жылдамдығы x (км/сағ) болса, онда өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ екендігін ескерсек; ағыспен жылдамдық $(x + 2)$ км/сағ, ал ағысқа қарсы – $(x - 2)$ км/сағ, ал $x>2$.

Бір жолға катер өзен ағысымен 6 сағ, ал ағысқа қарсы 7 сағ уақыт жұмсағаны белгілі. Теңдеу құрамыз:

$7(x-2) = 6(x+2)$

$7x - 14 = 6x + 12$

$7x - 6x = 12 + 14$

$x = 26$

Меншікті жылдамдығы - 26 км/сағ

Жауабы : 26 км/сағ

Б) жұмыс және еңбек өнімділігіне берілген есептер

Мұндай есеп түрлерін негізгі құраушылары:

A – жұмыс;

N – еңбек өнімділігі (уақыт бірлігінде орындалатын жұмыс);

t – уақыт

Мұндай есептерді таблицалық жолмен шешкен дұрыс.

Мысал 3.

Бірінші сылақшы екінші сылақшыға қарағанда жұмысты 5 сағ тез орындайды. Екеуі бірге бұл жұмысты 6 сағ-та орындайды. Әр қайсысы қанша уақытта жұмысты орындайды.

1 тәсіл:

2-ші сылақшы жұмысты х сағ орындаса, онда 1-ші сылақшы – (х + 5) сағ (х>0).

Барлық орындауға қажет жұмысты 1 десек, онда 2-ші сылақшының жұмыс өнімділігі - $\frac{1}{x}$, 1-ші сылақшы жұмыс өнімділігі - $\frac{1}{x+5}$. 2-уі бірге бұл жұмысты 6 сағ-та орындайтындығы белгілі, онда олардың ортақ өгімділігі $\frac{1}{6}$-ге тең.

Теңдеу құрамыз:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} \quad |\times 6x(x+5)\neq 0$$

$6(x + 5) + 6x = x(x + 5)$

$6x + 30 + 6x = x^2 + 5x$

$x^2 - 7x - 30 = 0$

Квадрат теңдеуді Виет теоремасына кері теоремамен шығарамыз:

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=-30 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-3 \end{array}\right.$$ x=-3<0 шартты қанағаттандырмайды

Осыдан, 2-ші сылақшы жұмысты 10 (сағ), ал 1-ші – 15 (сағ) орындайды.

Жауап: 10сағ, 15сағ.

2 тәсіл:

2-ші сылақшының жұмыс уақыты- х сағ

	Уақыт, сағ	1 сағ жұмыс	Орындалған жұмыс
1 сылақшы	х + 5	1/(х+5)	1
2 сылақшы	х, х>0	1/х	1
Бірге	6	1/6	1

2-уі бірге бұл жұмысты 6 сағ-та орындайтындығы белгілі, онда олардың ортақ өнімділігі $\frac{1}{6}$-ге тең. Теңдеу құрастырамыз:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} \quad |\times 6x(x+5)\neq 0$$

$6(x + 5) + 6x = x(x + 5)$

$6x + 30 + 6x = x^2 + 5x$

$x^2 - 7x - 30 = 0$

Квадрат теңдеуді Виет теоремасына кері теоремамен шығарамыз:

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=-30 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-3 \end{array}\right.$$ x=-3<0 шартты қанағаттандырмайды

Сондықтан, 2-ші сылақшы жұмысты 10 (сағ), ал 1-ші – 15 (сағ) орындайды.

Жауап: 10сағ, 15сағ.

В) концентрация және пайызға берілген есептер

Бұл есептер ең үлкен қиындықтар тудырады. Мұндай жағдайда есепті түсіну және шарттарын жеңіл жолмен жазу қажет.

Есепті шешу жоспары.

1. Белгісізді таңдау. Көп жағдайда белгісіз ретінде табуға қажет шаманы белгілейді.
2. Таза затты таңдау.
3. Бөлшекке ауыстыру. Егер есептің құрамында пайыз болса, онда оларды бөлшекке айналдырған жөн.
4. Қоспа күйін қадағалау.
5. Теңдеу құрастыру.
6. Жауапты жазу.

Мысал 4.

Теңіз суының құрамында 8 % тұз бар. 30 кг теңіз суының құрамында 5 % тұз болу үшін, қанша кг тұщы су қосу қажет?

1 тәсіл:

x кгтұщы су қосу қажет болсын, x>0.

Таза зат ретінде, тұзды аламыз.

Шешімді таблица арқылы жазамыз:

8% = 0,08, 5% = 0,05

қоспа	Таза зат мөлшері, кг	Жалпы қоспа мөлшері, кг	Массалық конц.
I	0,08·30	30	0,08
II	0,05·(30+x)	30 + x, x>0	0,05

Есеп шарты бойынша таза зат мөлшері өзгеріссіз қалады, теңдеу құрамыз:

$0{,}08 \cdot 30 = 0{,}05 \cdot (30 + x)$

$2{,}4 = 1{,}5 + 0{,}05x$

$0{,}05x = 0{,}9$

$x = 18$

Жауабы: 18 кгсу.

2 тәсіл:

x кгтұщы су қосу қажет болсын, x>0.

Таза зат ретінде, тұзды аламыз.

Шешімді таблица арқылы жазамыз:

	масса, кг	% тұз мөлшері	тұз, кг
Тұщы су	x, x>0	0	0
Теңіз суы I	30	0,08	0,08·30

Теңіз суы II	30 + x	0,05	0,05·(30+x)

Есеп шарты бойынша таза зат мөлшері өзгеріссіз қалады, теңдеу құрамыз:

0,08·30 = 0,05· (30 + x)

2,4 = 1,5 + 0,05x

0,05x = 0,9

x = 18

Жауабы: 18 кгсу.

Г) пайызға берілген есептер.

Мысал 5.

Жас саңырауқұлақ массасының 90% су, алкептірілген саңырауқұлақтың – 12% су. 22 кг жас саңырауқұлақтан қанша кептірілген саңырауқұлақ алуға болады?

Шешуі:

Кептірілген саңырауқұлақ салмағын x кг деп белгілейміз, x>0, себебі жас саңырауқұлакттың 90% су, онда құрғақ зат 10%. Ал кептірілген саңырауқұлақтарда құрғақ зат 88%.

Шешімді таблица арқылы жазамыз:

	масса, кг	су (% мөлшері)	су, кг	Құрғақ зат, кг
Балғын ск	22	90	0,9·22 = 19,8	2,2
Кептірілген ск	X	12	0,12x	0,88x

Теңдеу құрамыз:

0,88x = 2,2

x = 2,2/0,88

x = 220/88

x = 2,5

Жауабы: 2,5 кг

Мәтінді есептерді шығара білу оқушылардың дағдысына байланысты. Мәтінді есептердің негізгі түрлерін шешу нұсқасы ұсынылып отыр. Ауызша, сипаттама түрде жазбалар қолайсыз болады. Жұмысқа, қоспаларға арналған есептерді таблица түрінде жазуға болады. Мұндай жазу өте ықшам, көрнекті және есептің бүкіл тұжырымын өзгертеді, бірақ оқушыға, есептің берілуін жазуда, кез келген тәсілді таңдауына болады.

15 тарау. «Тізбектер»

Бұл тарауда, берілген n-ші мүшесінің формуласынан, рекуррентті формула бойынша тізбектердің алғашқы мүшелерін табу, тізбектің жалпы мүшесінің формуласын табуға , n-ші мүшені табу, арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың алғашқа n мүшелерінің қосындысын, арифметикалық прогрессияның айырымы мен бірінші мүшесін,геометриялық прогрессияның еселігі мен бірінші мүшесін, арифметикалық және геометриялық прогрессиялартүрінде берілген сандар тізбегінің қосындысын табу, прогрессиялардың барлық теріс (оң) мүшелерінің қосындысын табу, прогрессия мүшесінің нөмірін, шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табу.

Бұл тараудың есептерін шешу кезінде оқушылар формулаларды, прогрессия қасиеттерін, оларды қолдана білу, теңдеулерді және олардың жүйелерін құрастыра білу және шешу, теңсіздіктерді шеше білу дағдысын көрсету қажет.

Егер прогрессия есептерінің берілуі дәстүрліден өзгеше болса, есептерді шығару кезінде оқушыларда қиындықтар туындайды. Оқушыларды дайындау кезінде оларға есептердің шартындағы мынандай қосымша сөздерге «өспелі геометриялық прогрессия», «прогрессияның оң мүшелері», «$b_n \geq 0$» ерекше мән беру қажет және геометриялық прогрессия, еселігінің жұп дәрежелі болған жағдайда, шешімнің екі жағдайын қарастыру қажет.

Бұл тараудың есептерін шешу кезінде біріншіден формулаларды жазып, ал содан кейін олардың қолданылуын көрсету керек.

Бірнеше мысалдар қарастырайық.

Мысал1. Геометриялық прогрессия еселігін және бірінші мүшесін тап $b_4=54$, $b_8=4374$

1 тәсіл

берілгені:	шешуі:
$\{b_n\}$ – *геометриялық прогрессия* b_4 *=54,* b_8 *=4374* *Табу керек:* b_1, q	$егер: q = 3, то$ $b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{54}{3^3} = \frac{54}{27} = 2$ $егер: q = -3, то$ $b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{54}{(-3)^3} = \frac{54}{-27} = -2$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$
$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$
$$b_8 = b_1 \cdot q^7$$
$$\begin{cases} 4374 = b_1 \cdot q^7 \\ 54 = b_1 \cdot q^3 \end{cases}$$
$$b_1 \neq 0, q \neq 0$$
$$\frac{4374}{54} = \frac{b_1 \cdot q^7}{b_1 \cdot q^3}$$
$$81 = q^4$$
$$q = \pm 3$$

Жауабы: *q=3,* b_1 *=2 или q= – 3,* b_1 *= – 2*

2 тәсіл

Берілгені:
$\{b_n\}$ *– геометриаялық прогрессия*
b_4 *=54,* b_8 *=4374*
Табу керек:
b_1*, q*

Шешуі:

$$q^{m-k} = \frac{b_m}{b_k}$$
$$q^{8-4} = \frac{b_8}{b_4}$$
$$q^4 = \frac{4374}{54}$$
$$q^4 = 81$$
$$q = \pm 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3 \\ b_1 = \frac{b_4}{q^3} \end{cases} \\ \begin{cases} q = -3 \\ b_1 = \frac{b_4}{q^3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3 \\ b_1 = \frac{54}{3^3} = \frac{54}{27} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -3 \\ b_1 = \frac{54}{(-3)^3} = \frac{54}{-27} = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Жауабы: *q=3,* b_1 *=2 немесеq= – 3,* b_1 *= – 2*

Мысал 2. Арифметикалық прогрессия айырымын және бірінші мүшесін тап, егер a_{11}=6, a_{20}=12

1 способ

Берілгені:
$\{a_n\}$ *– арифметикалық прогрессия*

Шешуі:

a_{11} =6, a_{20} =12 *Табу керек:* $a_1,\ d$	$a_n = a_1 + d(n-1)$ $a_{11} = a_1 + 10d$ $a_{20} = a_1 + 19d$ $\begin{cases} a_1 + 10d = 6 /(-1) \\ a_1 + 19d = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 19d = 12 \\ -a_1 - 10d = -6 \end{cases}$ $9d = 6$ $d = \frac{2}{3}$ $a_1 + 10d = 6$ $a_1 = 6 - 10d = 6 - \frac{10 \cdot 2}{3} = 6 - \frac{20}{3} =$ $= 6 - 6\frac{2}{3} =$ $= -\frac{2}{3}$

Жауабы: $d = \frac{2}{3}, a_1 = -\frac{2}{3}$

2 тәсіл

Берілгені: $\{a_n\}$ – *арифметикалық прогрессия* a_{11} =6, a_{20} =12 *Табу керек:* $a_1,\ d$	Шешуі: $d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$ $d = \frac{a_{20} - a_{11}}{20 - 11}$ $d = \frac{12 - 6}{20 - 11} = \frac{2}{3}$ $a_n = a_1 + d(n-1)$ $a_{11} = a_1 + 10d = 6$ $a_1 = 6 - 10d = 6 - \frac{10 \cdot 2}{3} = 6 - \frac{20}{3} =$ $= 6 - 6\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

Жауабы: $d = \frac{2}{3}, a_1 = -\frac{2}{3}$

Мысал 3. 3-кебөлгенде қалдығы 1 және 1000 –нан артық емес, барлық натурал сандардың қосындысын табыңдар.

Берілгені: *4;7;10;…;*a_n	Шешуі:

$a_n \leq 1000$ *Табу керек:* S_n	$a_n = 3n+1$ $n \in N$ $\{a_n\}$ – *арифметикалық прогрессия* $a_n \leq 1000$ $3n+1 \leq 1000$ $3n \leq 999$ $n \leq 333$ $a_{333} = 3 \cdot 333 + 1 = 1000$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ $S_n = \frac{a_1 + a_{333}}{2} 333 = \frac{4+1000}{2} \cdot 333 = \frac{1004 \cdot 333}{2} =$ $= 167166$

Жауабы: $S_n = 167166$

16 тарау.«Геометрия»

Оқушы теориялық мәліметтерден алған білімін есеп шығару барысында қолдана алатынын көрсету қажет.

Шешімді жазу барысында келесі ұсыныстарды ұстанған дұрыс:

-егер есепті шығару барысында кескін қолданылса, онда ол сол жақта, ал шарты оң жағында болуы тиіс,

-кескін ұқыпты және қаламмен орындалуы қажет,

- қолданылатын формулалар жазылуы тиіс,

-есептерді шешу барысында қолданылатын теоремаларға, қасиеттерге, белгілерге сілтемелер жасалуы тиісті,

- егер қажет болмаса, онда шешу барысында шаманың өлшем бірлігін қолдану міндетті емес.

Бірнеше есептерді қарастырайық.

Мысал 1. Егер $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ және берілген векторлар арасындағы бұрыш 30° тең болса , $\vec{\alpha}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін тап

Берілгені :

$\vec{a}, \vec{b}$

$|\vec{a}| = 4$

$|\vec{b}| = \sqrt{3}$

$(\vec{a}; \vec{b}) = \varphi = 30^o$

Табу керек : $\vec{a} \cdot \vec{b}$

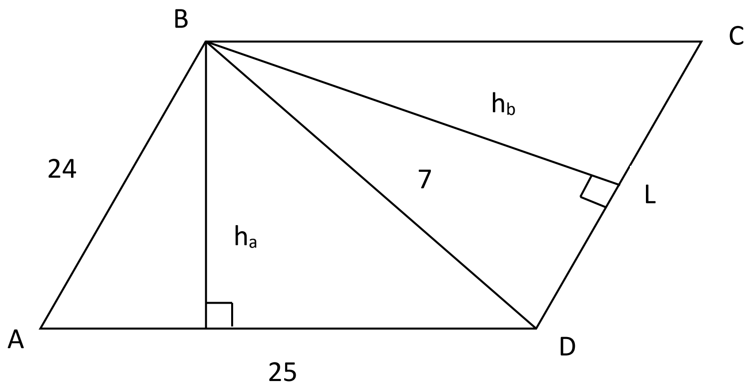
Шешуі :

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot \sqrt{3} \cos 30^o = \dfrac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$

Жауабы: 6

Мысал 2. Қабырғалары 24 см, 25 см, ал кіші диагоналі 7 см болатынпараллелограмның биіктіктерін анықтаңыз



Берілгені :

ABCD – параллелограмм

$a = 25$*см*

$b = 24$*см*

$d_1 < d_2$

$d_1 = 7$*см*

табу керек : h_a, h_b

1. ABD үшбұрышын қарастырайық: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{25+24+7}{2} = 28\,см$

Герон формуласы бойынша:

$$S_{\triangle ABD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{28(28-25)(28-24)(28-7)} =$$
$$= \sqrt{28 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3} = 84$$

2. ABD және CDB үшбұрыштарын қарастырайық

1) AB=CD (параллелограмм қасиеті бойынша)
2) BC=AD (параллелограмм қасиеті бойынша)
3) BD – жалпы

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta CDB$ (үш қабырғасы арқылы) $\Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CDB}$

3. $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot 84 = 168\,см^2$

4. $S_{ABCD} = ah_a = b \cdot h_b$

$$h_a = \frac{S}{a} = \frac{168}{25} = 6\frac{18}{25}$$

$$h_b = \frac{S}{b} = \frac{168}{24} = 7$$

Жауабы: $6\frac{18}{25}$смнемесе 7 см.

Настоящий сборник представляет собой методические рекомендации для учителей по оформлению и оцениванию письменных экзаменационных работ учащихся по математике при итоговой аттестации. Он содержит: пояснительную записку, требования к оформлению титульного листа, требования к оформлению письменной экзаменационной работы, критерии оценки и их содержание, процедуру проверки, рекомендации к содержанию рецензии и, наконец, рекомендации по оформлению конкретных заданий (задач) в зависимости от темы.

Составители:
Нурпеисова А.З. руководитель учебно-методического отдела образования г.Усть-Каменогорска;
Агафонова Т.Г. учитель математики КГУ "Средняя школа № 23" акимата г.Усть-Каменогорска;
Антропова Л.А. учитель математики КГУ "Средняя школа № 24" акимата г.Усть-Каменогорска;
Веричева Е.В. учитель математики КГУ «Средняя школа №4» акимата г.Усть-Каменогорска;
Гертель Т.П. учитель математики "Школа-гимназия № 11" акимата г.Усть-Каменогорска;
Дукенбаева Б.О. учитель математики КГУ "Средняя школа № 23" акимата г.Усть-Каменогорска;
Ильгова И.В. учитель математики КГУ "Средняя школа № 23" акимата г.Усть-Каменогорска;
Исмаилова А.Б. учитель математики КГУ "Средняя школа № 35" акимата г.Усть-Каменогорска;
Капустина Е.А. учитель математики КГУ "Средняя школа № 23" акимата г.Усть-Каменогорска;
Касенова Г.Т. учитель математики "Школа-лицей № 3" акимата г.Усть-Каменогорска;
Крушинская О.И. учитель математики КГУ "Средняя школа № 24" акимата г.Усть-Каменогорска;
Коваленко Т.И. учитель математики КГУ "Средняя школа № 18" акимата г.Усть-Каменогорска;
Кыржибаева А. учитель математики КГУ "Средняя школа № 33" акимата г.Усть-Каменогорска;
Нұрғалиева Ж.Т. учитель математики КГУ "Средняя школа № 23" акимата г.Усть-Каменогорска;
Сахариева Б.М. учитель математики "Школа-лицей № 3" акимата г.Усть-Каменогорска;
Таенова Р.М. учитель математики КГУ "Школа-гимназия № 10" акимата г.Усть-Каменогорска;
Чагайдак М.В. учитель математики КГУ "Средняя школа № 15" акимата г.Усть-Каменогорска.

Пояснительная записка

Общеобразовательный курс математики изучается с 1 по 11 классы. На каждой ступени обучения он имеет свои приоритетные задачи и строится с учетом осуществления преемственности между ступенями, но в разделе требований к знаниям, умениям и навыкам не прописаны требования к оформлению и оценке письменных работ, что становится важным при изменении формы итоговой аттестации школьников. Содержание методических рекомендаций поможет учителям математики сосредоточить внимание на оформлении решений, особенно при подготовке учащихся к письменной итоговой аттестации.

Учитывая, что задания для проведения письменного экзамена по математике за курс средней школы могут формироваться, исходя из объема знаний содержания математики за курс основной и старшей ступеней, мы остановимся на основном содержании математического образования в рамках 9-11 классов общеобразовательной школы. Рекомендации разработаны по следующим разделам: "Числовые выражения", "Преобразование тригонометрических выражений", "Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы","Геометрический смысл производной", "Исследование функций и построение графиков", "Наибольшее и наименьшее значение функций на данном отрезке", "Первообразная и интеграл. Площадь фигуры, ограниченная линиями", "Преобразование алгебраических выражений", "Алгебраические уравнения, неравенства и их системы", "Иррациональные уравнения и их системы ", "Показательные уравнения, неравенства и их системы", "Логарифмические уравнения и неравенства и их системы", "Смешанные системы уравнений", "Текстовые задачи", " Последовательности".

Рекомендации позволят учителям математики составить цельное, объективное представление не только о требованиях к математической подготовке школьников, но и требованиях к оформлению письменных работ по итоговой аттестации, тем самым будут способствовать правильному планированию учебного процесса в соответствии с требованиями государственных общеобразовательных стандартов, утвержденных постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года № 1080.

При разработке рекомендаций по оформлению и оценке письменных экзаменационных работ, руководствовались:

1.Инструктивно-методическое письмо "Требования к математической подготовке учащихся по оформлению письменных работ выпускников 11-х классов организаций Республики Казахстан" (2000г)

2. Методические рекомендации по оформлению и оцениванию письменных экзаменационных работ по математики за курс основной школы (2011г). Составители: Г.Ә. Әбілмаш учитель математики Высшей категории сш №42; С.Т. Лаптева учитель математики Высшей категории сш№39;

И.Б.Керимова, учитель математики Высшей категории сш №7; Н. Е.Исмагулова, учитель математики Высшей категории сш №43.

3. Статья Г.В.Дорофеева "Об экзаменах по алгебре и началам анализа" ("Математика в школе" 1990г.)

Итоговая аттестация по алгебре за курс основного среднего образования и по алгебре и началам анализа в 11-м классе проводится в форме письменного экзамена. Приводим рекомендации по оформлению письменной экзаменационной работы.

Титульный лист должен содержать запись:

Письменная ***Экзаменационная работа*** ***по математике*** ***за курс основной средней школы*** ***ученика (ученицы) 9 класса "А"*** ***Аманжоловой Сауле***	***Письменная*** ***Экзаменационная работа*** ***по алгебре и началам анализа*** ***за курс общеобразовательной школы*** ***ученика (ученицы) 11класса "А"*** ***Аманжоловлй Сауле***

Все остальные сведения: город, район, тип школы, номер школы, дата проведения экзамена и другие должны разборчиво читаться в штампе школы, поставленном на работах выпускников.

Первая страница оформляется как титульный лист, на второй странице на первой строчке указывается вариант (прописывается арабскими цифрами: 1,2), затем начинается решение задач. При выполнении записей от красных полей отступается 0,5см, от сгиба листа 1,5см Для выполнения черновика выделяются отдельные листы. Если, при выполнении работы выпускник пользуется черновиком, то необходимо вместе с экзаменационной работой сдать черновик.

Все задания письменной работы перед решениями переписывать нежелательно. Переписывается условие задачи (текст) и сразу приводится решение.

В черновике задания выполняются в любом порядке, в чистовике – в том порядке, который дан в экзаменационной работе.

В экзаменационной работе не допускается сокращение слов, возможны лишь общепринятые сокращения. После решения каждой задачи записывается ответ. При оформлении решения заданий необходимо записывать рассуждения, которые показывают знания учащимися соответствующих вопросов теории, умение применять их при решении. В предложениях нельзя заменять слова знаками (вместо "следовательно", вместо "возрастает" и др.). Символика может быть использована только в символической записи решения.

При решении текстовой задачи, после записи условия, важно привести объяснение и только затем записывать составленное уравнение.

Оформление письменной экзаменационной работы.

1.Работу оформлять четко, грамотно, аккуратно, последовательно.

2. Записать полный текст задачи.
3.Чертеж располагать слева.
4. Чертеж к задаче выполнять ручкой, используя линейку.
5. Краткое условие (дано) задачи располагать справа от чертежа.
6. Ниже записать вопрос задачи.
7.Символы и знаки использовать по назначению.
8.Решения записывать последовательно, по действиям.
9. Уравнение оформлять построчно.
10.Ответ записывать ниже решения на отдельной строке слева.

Важные формулы, равенства, неравенства, следует записывать в отдельные строки, чтобы их выделить.

Следует правильно располагать математические знаки в строке. Перенос формулы или выражения с одной строки на другую разрешается производить только на знаках "+", "–", и "=". При переносе знаков "+", "–" и "=" они повторяются на следующей строке. Необходимо правильно располагать черту дроби и знак равенства. Следить за математической строгостью изложения, скрупулезно точно использовать математическую символику.

Каковы критерии оценки письменной экзаменационной работы?

Учителям при проверке экзаменационных работ по математике необходимо выполнять требования, предъявляемые к выставлению той или иной оценки за письменную работу, приведённые ниже. В настоящее время работа содержит шесть заданий и оценка "5" ставится за любые пять верно выполненных заданий. Если верно решены все шесть заданий, то экзаменационная комиссия может оценить работу на "5", если даже в ней будет отмечено больше двух недочетов.

К грубым ошибкам относятся ошибки, которые обнаруживают незнание учащимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять, незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской. Отсутствие чертежей в геометрических задачах, их несоответствие условиям задачи, отсутствие ссылки на применяемые теоремы, аксиомы, леммы.

К негрубым ошибкам относятся: потеря корня или сохранение в ответе постороннего корня, отбрасывание без объяснения одного из корней и равнозначных им. При выполнении чертежей в геометрических задачах не сохранение пропорций, правил изображения (невидимые линии, отсутствие изображения полюса шара и т.п.)

К недочетам относятся: нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях. Слишком перегруженные чертежи к геометрическим задачам, отсутствие единиц измерений, обозначение осей координат, направление стрелок осей координат, числовой прямой.

Если одна и та же ошибка (один и тот же недочет) встречается несколько раз, то это рассматривается как одна и та же ошибка (один и тот же недочет).

Зачеркивания в работе (желательно, чтобы они были аккуратными) свидетельствует о поисках решения, что считать ошибкой не следует (кроме работ претендентов на аттестат особого образца).

Если в решении всей работы встретится хотя бы одна ошибка (грубая или негрубая), то недочеты при оценке не учитываются.

Оценка «5» (отлично) ставится в том случае, если работа выполнена полностью и без ошибок. В работах претендентов на аттестат особого образца со знаком «Алтын белгі» не должны содержаться негрубые ошибки и недочёты.

Для выпускников, получающих аттестат с отличием количество негрубых ошибок и недочётов не должно превышать более двух.

Оценка «4» (хорошо) ставится в следующих случаях:

а) пять заданий выполнены полностью и не содержат грубых ошибок, но содержат негрубые ошибки или более двух недочётов, или негрубые ошибки и недочёты;

б) четыре задания выполнены без ошибок, а одно задание содержит ошибки;

в) шестое задание либо не выполнено, либо содержит ошибки.

Оценка «2» (неудовлетворительно) ставится в том случае, если каждое из трёх (или более) заданий содержит грубые ошибки (одну или более).

Оценка «1» ставится в том случае, если каждое из заданий решено менее чем на одну треть объёма.

Оценка «3»(удовлетворительно) ставится во всех остальных случаях.

Какова процедура проверки и оценки письменных работ учащихся?

Оценка ставится на левой стороне страницы после работы учащихся. Затем в работах с оценкой "5" (отлично) экзаменационная комиссия пишет рецензию. Далее подписи председателя и членов экзаменационной комиссии. Фамилии, имена, отчества, подписи председателя экзаменационной комиссии и экзаменаторов на работах выпускников должны быть оформлены разборчиво и прописываются полностью (сокращать нельзя).

Рецензия(заголовок пишется)

____

____

*Председатель экзаменационной комиссии: Ковалев Иван Михайлович*___
*Экзаменующий учитель: Айдарова Карлыгаш Нурбековна*_____
*Ассистенты: Иванова Светлана Степановна*_______

Проверка работ осуществляется в общеобразовательном учреждении преподавателем математики и членами экзаменационной комиссии. Если проверка в день экзамена не окончена, то работы сдаются на хранение директору. Работу внимательно читают все члены экзаменационной комиссии, в работе отмечаются все имеющиеся ошибки и недочеты. К работам выпускников, претендующих на аттестат особого образца со знаком «Алтын белгі», для выпускников, получающих аттестат с отличием, дается письменная рецензия о качестве выполнения данной экзаменационной работы.

Что необходимо отразить в рецензии?

В рецензии необходимо отразить: правильность выполнения в соответствии с требованиями государственных общеобразовательных стандартов, рациональность выбранных способов решения, последовательность рассуждений, аккуратность записей, умение обосновывать применение формул, свойств, теорем и т.д., соблюдение выполнения требований к оформлению письменной экзаменационной работы.

Глава 1. «Числовые выражения»

1. При сложении (вычитании) дробей с различными знаменателями нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями. Полученную дробь, если можно, сократить и исключить из нее целую часть.

2. Если дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, то одну из единиц целой части уменьшаемого нужно заменить равной ей дробью.

3. При умножении чисел, состоящих из целой части и дробной, их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем умножают согласно примеру: $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{19}{6} = \frac{133}{18} = 7\frac{7}{18}$

4. При делении чисел, состоящих из целой части и дробной, нужно предварительно представить их в виде дроби и применить правило деления дроби на дробь. Например, $3\frac{5}{7} \div 2\frac{1}{3} = \frac{26}{7} \div \frac{7}{3} \div \frac{26\cdot 3}{7\cdot 7} = \frac{78}{49}$.

5. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем – все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1)

6. Если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе и первый результат делится на второй.

Пример 1. $2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3}$

$1 -$ *способ решения*:

$$2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{25}{10} - \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{25}{10} - \frac{4}{3} = \frac{75-40}{30} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Ответ: $1\frac{1}{6}$

$2 -$ *способ решения*: $2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3}$

1) $0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

2) $2{,}5 - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = (2-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$

Ответ: $1\frac{1}{6}$

Пример 2. $\left[18\frac{1}{6}-\left(3{,}06\div 7\frac{1}{2}+3\frac{2}{5}\cdot 0{,}38\right)\right]\div\left(19-2\frac{3}{8}\cdot 5\frac{1}{3}\right)$

Перепишем данное числовое выражение, определив порядок действий:

$$\left[18\frac{1}{6}-^{(4)}\left(3{,}06\div^{(1)} 7\frac{1}{2}+^{(3)}3\frac{2}{5}\cdot^{(2)} 0{,}38\right)\right]\div^{(7)}\left(19-^{(6)}2\frac{3}{8}\cdot^{(5)} 5\frac{1}{3}\right)$$

Теперь будем проводить вычесление в указанном порядке:

8) $3{,}06\div 7\frac{1}{2}=\frac{306}{100}\div\frac{15}{2}=\frac{306}{100}\cdot\frac{2}{15}=\frac{306\cdot 2}{100\cdot 15}=\frac{153\cdot 2}{50\cdot 15}=\frac{51}{25\cdot 5}=\frac{51}{125}$

9) $3\frac{2}{5}\cdot 0{,}38=\frac{17}{5}\cdot\frac{38}{100}=\frac{17\cdot 19}{5\cdot 50}=\frac{323}{250}=1\frac{73}{250}$

10) $\frac{51}{125}+1\frac{73}{250}=1\ \frac{102+73}{250}=1\frac{175}{250}=1\frac{7}{10}$

11) $18\frac{1}{6}-1\frac{7}{10}=18\frac{5}{30}-1\frac{21}{30}=17\frac{35}{30}-1\frac{21}{30}=16\frac{14}{30}=16\frac{7}{15}$

12) $2\frac{3}{8}\cdot 5\frac{1}{3}=\frac{19}{8}\cdot\frac{16}{3}=\frac{19\cdot 16}{8\cdot 3}=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}$

13) $19-12\frac{2}{3}=18\frac{3}{3}-12\frac{2}{3}=6\frac{1}{3}$

14) $16\frac{7}{15}\div 6\frac{1}{3}=\frac{247}{15}\div\frac{19}{3}=\frac{247}{15}\cdot\frac{3}{19}=\frac{247\cdot 3}{15\cdot 19}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}=2\frac{6}{10}=2{,}6$

Ответ: 2,6

Глава 2. «Преобразование тригонометрических выражений»

При доказательстве тригонометрических тождеств используются, как формулы сокращенного умножения, так и формулы, связывающие между собой основные тригонометрические функции. Задачи, связанные с вычислением значений тригонометрических выражений без использования таблиц, обычно решаются с помощью тождественных преобразований, приводящих искомое выражение к виду содержащее табличные значения тригонометрических функций.

Пример 1

Найти tgα, если sinα = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $90^0 < \alpha < 180^0$

I способ решения:

3) |cosα| = $\sqrt{1-sin^2\alpha}$, учитывая, что $90^0 < \alpha < 180^0$, α – угол II четверти.

cosα = - $\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) tgα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Ответ: 1

II способ решения:

1) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$$ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

$$ctg^2\alpha = 1 : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$$

$$ctg^2\alpha = 1 \cdot \frac{4}{2} - 1$$

$$ctg^2\alpha = 2 - 1$$

$$ctg^2\alpha = 1, \quad \text{учитывая,} \quad \text{что } \alpha - \text{угол II четверти.}$$

$$ctg\alpha = -1$$

2) $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$

$$tg\alpha = \frac{1}{-1}$$

$$tg\alpha = -1$$

Ответ: -1

Пример 2.

Вычислить, пользуясь формулами приведения:

tg (-300^0) = - tg300^0 = - tg ($270^0 + 30^0$) = ctg30^0 = $\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$

Пример 3.

Вычислить cos2α, если sinα = $-\frac{12}{13}$, $180^0 < \alpha < 270^0$, α – угол III четверти.

Решение:

cos2α = 1 – 2sin^{2}α, тогда

$$cos2\alpha = 1 - 2\left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{2 \cdot 144}{169} = 1 - \frac{288}{169} = -\frac{119}{169}$$

Ответ : $-\frac{119}{169}$

Пример 4.

Доказать тождество: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin2\alpha = 1$

Решение: $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin2\alpha = 1$

$1 + \sin2\alpha - \sin2\alpha = 1$

$1 = 1$

Тождество доказано.

Пример 5.

Проверьте, что

$\sin87^0 - \sin59^0 - \sin93^0 + \sin61^0 = \sin1^0$

$\sin(90^0 - 3^0) - \sin(90^0 + 3^0) - \sin(60^0 - 1^0) + \sin(60^0 + 1^0) =$

$= \cos3^0 - \cos3^0 - \sin60^0\cos1^0 + \sin1^0\cos60^0 + \sin60^0\cos1^0 + \sin1^0\cos60^0 =$

$= \sin1^0\cos60^0 + \sin1^0\cos60^0 = \frac{1}{2}\sin1^0 + \frac{1}{2}\sin1^0 = \sin1^0$

$\sin1^0 = \sin1^0$, что и требовалось доказать.

Пример 6.

Вычислить:

$$\cos20^0\cos40^0\cos80^0 = \frac{2sin20^0cos20^0cos40^0cos80^0}{2sin20^0} =$$

$$= \frac{sin40^0cos40^0cos80^0}{2sin20^0} = \frac{2sin40^0cos40^0cos80^0}{4sin20^0} = \frac{sin80^0cos80^0}{4sin20^0} =$$

$$= \frac{2sin80^0cos80^0}{8sin20^0} == \frac{sin160^0}{8sin20^0} = \frac{\sin(180^0 - 20^0)}{8sin20^0} = \frac{sin20^0}{8sin20^0} = \frac{1}{8}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$

Характерная особенность преобразований тригонометрических выражений состоит в том, что к одному и тому же результату можно прийти как правило разными путями.

В задачах, где речь идет о преобразовании тригонометрических выражений, всегда предполагается, хотя часто это и не оговаривается, что преобразование предложенного выражения должно быть произведено в его области определения.

При выполнении задания необязательно записывать использованные формулы. Их применение очевидно.

Глава 3. «Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы»

При выполнении задания необязательно записывать использованные формулы, если их применение очевидно.

Пример 1. Решите уравнение:

$$4\sin(0{,}5\pi + x) + 3\sin^2 x - 3 = 0$$

$$4\cos x + 3\sin^2 x - 3 = 0$$

$$4\cos x + 3(1 - \cos^2 x) - 3 = 0$$

$$4\cos x + 3 - 3\cos^2 x - 3 = 0$$

$$4\cos x - 3\cos^2 x = 0$$

$$\cos x(4 - 3\cos x) = 0$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, при этом остальные множители существуют.

$\cos x = 0$ или $4 - 3\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$3\cos x = 4$

$\cos x = \frac{4}{3},\ \frac{4}{3} \notin [-1;1]$

$x \in \phi$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Пример 2. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\cos x - 2}{\cos\frac{x}{2}} = 2$

Найдем область допустимых значений переменной:

$cos\frac{x}{2} \neq 0$

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad \left| \cdot 2 \right.$

$x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\frac{\cos x - 2}{\cos\frac{x}{2}} = 2 \left| \cdot \cos\frac{x}{2} \right.$

$\cos x - 2 = 2\cos\frac{x}{2}$

$\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) - 2 - 2\cos\frac{x}{2} = 0$

$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 - 2\cos\frac{x}{2} - 2 = 0$

$2\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0$

Введем замену: $\cos\frac{x}{2} = t,\ t \in [-1;1]$

$2t^2 - 2t - 3 = 0$

$D=b^2-4ac$

$D=2^2-4\cdot2\cdot(-3)=4+24=28$

$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

$t_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2},$

$t_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Проверим корни:

$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \left| +1 \right.$

$3 < \sqrt{7} + 1 < 4 \quad \left| : 2 \right.$

$1{,}5 < \frac{\sqrt{7}+1}{2} < 2$

Значит $t_1 \notin [-1;1]$

$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \Big| \cdot (-1)$

$-3 < -\sqrt{7} < -2 \quad \Big| +1$

$-2 < -\sqrt{7}+1 < -1 \quad \Big| : 2$

$-1 < \frac{-\sqrt{7}+1}{2} < -\frac{1}{2}$

$t_2 \in [-1;1]$

Вернемся к замене:

$cos\,\frac{x}{2} = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$\frac{x}{2} = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi n, n \in Z \qquad \Big| \cdot 2$

$x = \pm 2\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 4\pi n, n \in Z$ - принадлежит ОДЗ

Ответ: $x = \pm 2\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 4\pi n, n \in Z$

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = \frac{3\pi}{2} \\ 5\cos^2 x = 6\sin\, y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + y \\ 5\cos^2 x = 6\sin\, y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + y \\ 5\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = 6\sin\, y - 1 \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$5\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = 6\sin\, y - 1$

$5\sin^2 y = 6\sin y - 1$

$5\sin^2 y - 6\sin y + 1 = 0$

Введем замену: $\sin\, y = t, \quad t_1 \notin [-1;1]$

$5t^2 - 6t + 1 = 0$

а=5; в=-6; с=1

а+в+с=0

$t_1 = 1$

$t_2 = \frac{c}{a};\quad t_2 = \frac{1}{5}$

Вернемся к замене:

$\sin\ y = 1$

$y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\sin\ y = \frac{1}{5}$

$y_2 = (-1)^{\kappa} \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = \frac{3\pi}{2} + (-1)^{\hat{e}} \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi\hat{e}, \hat{e} \in Z \\ y_2 = (-1)^{\hat{e}} \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi\hat{e}, \hat{e} \in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2\pi + 2\pi n, n \in Z \\ y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = \frac{3\pi}{2} + (-1)^{\kappa} \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi\kappa, \kappa \in Z \\ y_2 = (-1)^{\kappa} \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi\kappa, \kappa \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \left(\frac{3\pi}{2} + (-1)^n \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi n; (-1)^n \arcsin \tfrac{1}{5} + \pi n\right), n \in Z$

Пример 4. Решите неравенство:

$2\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \geq -1$

Разделим обе части неравенства на 2, получим:

$\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \geq -\frac{1}{2}$

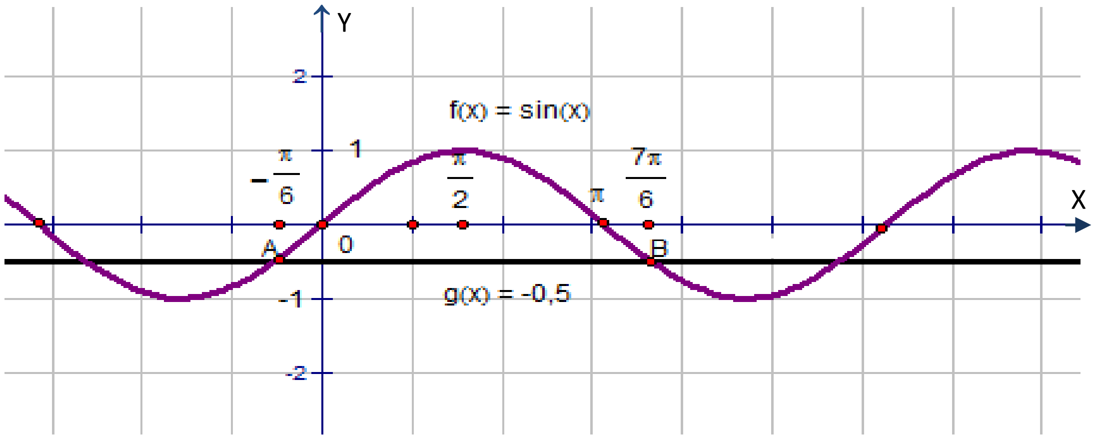
В одной координатной плоскости построим графики функций

$y = \sin\ x$ и $y = -\frac{1}{2}$.

Тогда, прямая пересечёт кривую синусоиды в бесконечном множестве точек.

Части кривой синусоиды, удовлетворяющие данному неравенству,

расположены выше прямой $y = -\frac{1}{2}$.



Учитывая, что $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, вычислим значения $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \pi - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{7\pi}{6}$.

Основной промежуток решения: $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$. Тогда $-\frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{6}$.

Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, получим неравенство:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

К каждой части неравенства прибавим $\frac{\pi}{4}$:

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{2} \le \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\frac{\pi}{12} + 2\pi n \le \frac{x}{2} \le \frac{17\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Обе части неравенства умножим на 2:

$$\frac{\pi}{6} + 4\pi n \le x \le \frac{17\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in Z$$

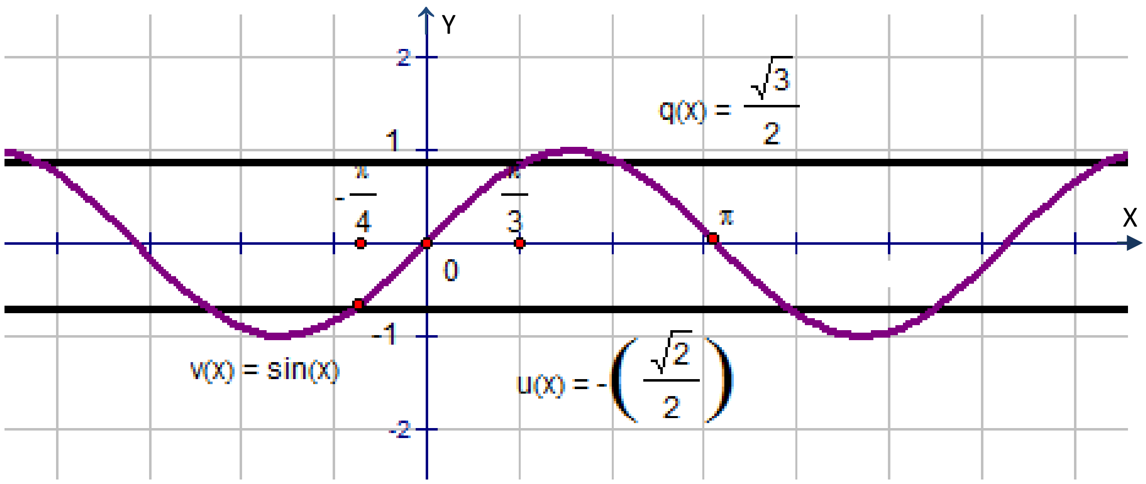
Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 4\pi n; \frac{17\pi}{6} + 4\pi n\right]\ n \in Z$.

Пример 5. Решите неравенство:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

В одной координатной плоскости построим графики функций $y = \sin x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда, прямые пересекут кривую косинусоиды в бесконечном множестве точек. Части кривой косинусоиды, удовлетворяющие данному неравенству, расположены между прямыми $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Учитывая, что $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ и $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ вычислим значения $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

Основной промежуток решения: $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Тогда $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$.

Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, получим неравенство:

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]\ n \in Z$.

Глава 4. «Геометрический смысл производной»

При выполнении заданий необходимо записывать словесные пояснения и формулы, на основании которых идет решение задачи, кроме очевидных.

Пример 1.

Сравнить с нулем $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)$, если $f(x) = \cos(\pi + x)$.

Преобразуем функцию, используя формулы приведения $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. Получаем $f(x) = -\cos x$.

Найдем производную $f(x) = -\cos x$.

$f'(x) = (-\cos x)' = \sin x$.

Вычислим значение производной в точке $x=\frac{4}{3}\pi$.

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$..

Используем формулу приведения $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сравним полученное значение с нулем: $-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$.

Ответ: $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)<0$.

Пример 2.

Найдите скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону: $x(t)=2t^3+t^2-4$ (см) в момент времени $t=4$с.

Исходя из механического смысла производной, $\upsilon(t)=x'(t)$ и $\upsilon'(t)=a(t)$.

Найдем производную $x(t)=2t^3+t^2-4$.

$x'(t)=\left(2t^3+t^2-4\right)'=6t^2+2t$.

$\upsilon(t)=6t^2+2t$.

Вычислим скорость в момент времени $t=4$с.

$\upsilon(4)=6\cdot 4^2+2\cdot 4=104$ см/с.

Найдем производную $\upsilon(t)=6t^2+2t$.

$\upsilon'(t)=(6t^2+2t)'=12t+2$.

$a(t)=12t+2$

Вычислим ускорение в момент времени $t=4$с.

$a(4)=12\cdot 4+2=50$ см/с^2.

Ответ: 104см/с; 50 см/с^2.

Пример 3.

В какой точке касательная к графику функции $f(x)=\sqrt{3x+2}$ образует с осью *Ox* угол 45°?

Исходя из геометрического смысла производной, $tg\alpha = f'(x_0)$.

Найдем производную $f(x) = \sqrt{3x+2}$.

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x+2}\right)' = \left((3x+2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{-1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}.$$

$$tg\,45° = \frac{3}{2\sqrt{3x_0+2}}.$$

$$1 = \frac{3}{2\sqrt{3x_0+2}}.$$

Решаем иррациональное уравнение $2\sqrt{3x_0+2} = 3$.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$4(3x_0+2) = 9.$

$(3x_0+2) = \frac{9}{4}.$

$3x_0 = \frac{9}{4} - 2.$

$3x_0 = \frac{9}{4} - \frac{8}{4}.$

$3x_0 = \frac{1}{4}.$

$x_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}.$

$x_0 = \frac{1}{12}.$

Проверим найденное значение, подставив его в иррациональное уравнение.

$$2\sqrt{3 \cdot \frac{1}{12} + 2} = 3.$$

$$2\sqrt{3 \cdot \frac{1}{12} + 2} = 2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

$x_0 = \frac{1}{12}$ - корень уравнения.

Вычислим соответствующее значение $y_0 = \sqrt{3x_0+2}$.

$$y_0=\sqrt{3\cdot\frac{1}{12}+2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

В точке $\left(\frac{1}{12};1\frac{1}{2}\right)$ касательная к графику функции $f(x)=\sqrt{3x+2}$ образует с осью Ox угол 45°.

Ответ: $\left(\frac{1}{12};1\frac{1}{2}\right)$.

Пример 4.

Найти точки, в которых касательная к графику функции $y=\frac{x+1}{x+2}$ параллельна прямой $y=x+5$.

Если касательная к графику функции $y=\frac{x+1}{x+2}$ параллельна прямой $y=x+5$, то угловой коэффициент касательной равен 1.

$k=1.$

Исходя из геометрического смысла производной, $k=y'(x_0)$.

$y'(x_0)=1$.

Найдем производную $y=\frac{x+1}{x+2}$.

$$y'=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'=\frac{(x+1)'(x+2)-(x+2)'(x+1)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}.$$

$$\frac{1}{(x_0+2)^2}=1.$$

$(x_0+2)^2=1.$

$x_0+2=1$ или $x_0+2=-1$.

$x_0=-1$ или $x_0=-3$.

Найдем соответствующие значения y_0.

$x_0=-1$, $y_0=\frac{-1+1}{-1+2}=0$. $(-1;0)$.

$x_0=-3$, $y_0=\frac{-3+1}{-3+2}=\frac{-2}{-1}=2$. $(-3;2)$.

В точках $(-1;0),(-3;2)$касательная к графику функции $y=\frac{x+1}{x+2}$ параллельна прямой $y=x+5$.

Ответ: $(-1;0)$, $(-3;2)$.

Глава 5. «Исследование функций и построение графиков»

При нахождении области определения функции необходимо обратить внимание на следующее утверждения:

5) Областью определения целой рациональной функции (задана в виде многочлена) является множество всех действительных чисел;

6) Областью определения дробно-рациональной функции является множество всех значений аргумента из R, за исключением тех значений аргумента, при которых знаменатель равен нулю;

7) Область определения функции, заданной в виде иррационального выражения, зависит от показателя корня, т.е. если показатель корня – нечетное число, то областью определения является множество всех действительных чисел, кроме чисел, при которых знаменатель равен нулю; если показатель корня – четное число, то областью определения является множество значений аргумента, при котором подкоренное выражение неотрицательно, если корень находится в числителе, и положительно, если корень – в знаменателе;

8) Если функция задана в виде алгебраической суммы различных функций, то областью определения является пересечение областей определений всех слагаемых функций.

Для нахождения промежутков возрастания и убывания, применяется следующий алгоритм:

1) найти область определение функций;

2) найти производное функций;

3) решить неравенство:$f'(x)>0$ или $f'(x)<0$;

4) с помощью данной теоремы записать промежуток возрастание и убывание.

Для исследования функций с помощью производной, применяется следующий алгоритм:

1) найти область определения;

2) выяснить, является ли функция $f(x)$ четной или нечетной, является ли периодической;

3) найти точки пересечения графика с осями координат;

4) промежутки знакопостоянства;

5) промежутки возрастания и убывания, точки экстремума;

6) составить таблицу;

7) найти асимптоту функций;

8) построить график функций;

9) с помощью графика найти область значение функций.

Пример 1..Исследовать функцию и построить график:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3};$$

Исследование функции выполняем по выше изложенному алгоритму:

9) функция является рациональной, область определения функций множество действительных чисел, $\mathrm{D}(f) = R$;

10) $f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}$ функция ни четная, ни нечетная, не периодичная;

11) Находим точки пересечения графика с осями координат:

с осью Оу: $x = 0, f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, $A\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$

с осью Ох: $y = 0$, $\quad \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3} = 0$

$$\frac{1}{3} \cdot (x^3 - 3x^2 + 4) = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\frac{1}{3}\cdot(x+1)(x-2)^2=0$$

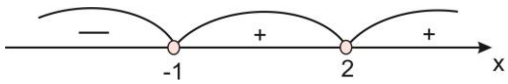
$$x+1=0 \quad \text{или} \quad (x-2)^2=0$$

$$x=-1 \quad \text{или} \quad x-2=0$$

$$x=2$$

Точки пересечения с осью Ox: $B(-1;\ 0)$ и $C(2;\ 0)$;

12) $x=-1$ и $x=2$ определить промежутки знакопостоянства методом интервалов:



Значит, на промежутке$(-\infty;\ -1)$, $f(x)<0$,

а на промежутке (–1; 2) ∪ (2; +∞), $f(x)>0$;

13) Находим промежутки возрастания и убывания, точки экстремума

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\right)'=x^2-2x;$$

$$f'(x)=0, \quad x^2-2x=0$$

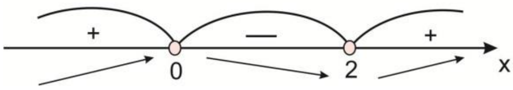
$$x(x-2)=0$$

$$x_1=0 \text{ или } \quad x-2=0$$

$$x_2=2$$

x_1, x_2 – критические точки.

Критические точки разбивают область определения на промежутки. Определяем знак производной на каждом из промежутков:



На промежутке (-∞; 0]∪[2; +∞) функция возрастает, т.к.$f'(x)>0$, а на промежутке [0; 2] функция убывает, т.к. $f'(x)<0$.

Значит, $x_1=0$ – точка максимума, $x_2=2$– точка минимума .

Находим значение функции в точках экстремума:

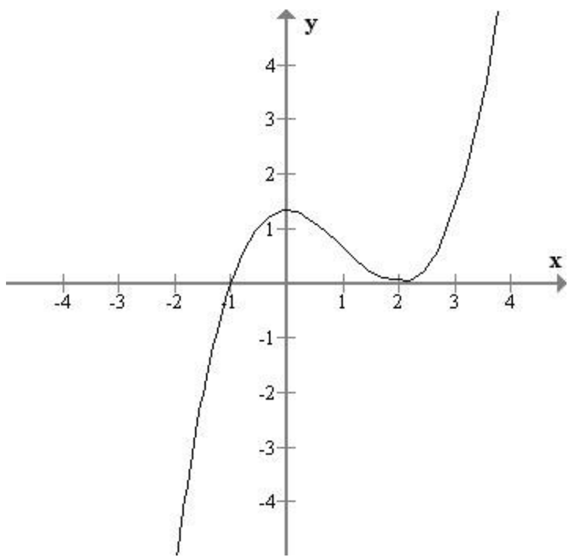
$$f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3+0^2+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}; \quad \left(0;\ \frac{4}{3}\right);$$

$$f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}-4+\frac{4}{3}=0; \quad (2;\ 0);$$

14) Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(0;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$
экстремум		max		min	

15) Построим график функций:



16) $E(f) = R.$

Пример 2. Найдите область определения функций: $y = \sqrt{3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3}$;

Решение: областью определения функции является решение

D(y): $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0$, с помощью замены $3^x = t$ неравенство сводится к квадратному неравенству $t^2 - 2t - 3 \geq 0.$

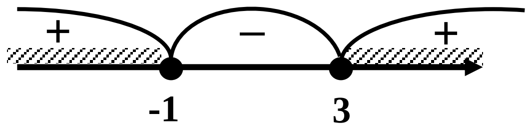
Решаем неравенство методом интервала $t^2 - 2t - 3 = 0$, определим нули функции.

$$D = b^2 - 4ac, \qquad D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}, \qquad t_1 = \frac{2-4}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$t_2 = \frac{2+4}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Определяем знак функций на промежутках, и берем промежуток знак которого соответсвует знаку неравенства.



$t \in (-\infty;\ -1] \cup [3; +\infty)$.

Возвращаемся к исходной переменной получаем: $3^x \leq -1$ и $3^x \geq 3$

$3^x \leq -1$ степень неотрицательного числа есть число положительное. Поэтому областью определения будет решение неравенства $3^x \geq 3$

$3^x \geq 3$

$3^x \geq 3^1$

$x \geq 1,\ x \in [1; +\infty)$

Ответ: $D(y) = [1; +\infty)$.

Пример 3. Определить промежутки монотонности: $y = \frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$;

Решение: С помощью производной найти промежутки возрастание и убывание функций по алгоритму:

4) Область определения дробно-рациональной функций множество всех действительных чисел, из которого исключены корни многочлена:

$$x^2 + x + 1 \neq 0$$

$D = b^2 - 4ac,\ D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ корней нет, значит график функций не имеет точек пересечения с осью Ox, a>0, следовательно ветви верх, $D(y) = R$.

5) Найдем производную функций:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}\right)' = \frac{(2x-3)(x^2+x+1) - (x^2-3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2+2x-3x^2-3x-3-2x^3+6x^2-2x-x^2+3x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4x^2-4}{(x^2+x+1)^2};$$

6) $y' > 0,\ \frac{4x^2-4}{(x^2+x+1)^2} > 0$. Решим неравенство методом интервала.

Тогда $4x^2 - 4 = 0,\qquad (x^2+x+1)^2 \neq 0$

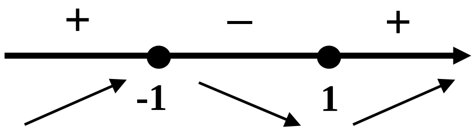
$4(x^2 - 1) = 0 \qquad x^2 + x + 1 \neq 0$

$x^2 - 1 = 0 \qquad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ не принимает нулевых значений

$x^2 = 1$

$x = -1,\ x = 1.$

С помощью этих точек область определения разделить на 3 промежутка. Определить знаки производной



Значит, на промежутке$(-\infty$; -1]∪[1; $+\infty)$ функция возрастает, а на промежутке [-1; 1] функция убывает.

Ответ: $(-\infty$; -1]∪[1; $+\infty)$ функция возрастает , на промежутке [-1; 1] функция убывает.

Глава 6. «Наибольшее и наименьшее значение функций на данном отрезке»

Решение многих практических задач часто сводиться к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается теорема Вейерштрасса, утверждающая, что непрерывная на отрезке$[a; b]$ функция принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, то есть существуют точки на отрезке $[a; b]$, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения.

Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке, нужно исследовать поведение функции на данном отрезке с помощью производной.

Для этого мы следуем алгоритму:

1. Находим ОДЗ функции.
2. Находим производную функции
3. Найти критические точки, т.е. $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

4. Находим промежутки, на которых производная сохраняет знак, и по ним определяем промежутки возрастания и убывания функции:

Если на промежутке I производная функции $f^{'}(x)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если на промежутке I производная функции $f^{'}(x)<0$, то функция $y=f(x)$ убывает на этом промежутке.

5. Находим точки максимума и минимума функции.

В точке максимума функции производная меняет знак с "+" на "–".

В точке минимума функции производная меняет знак с "–" на "+".

6. Находим значение функции в концах отрезка,

- затем сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках максимума, и выбираем из них наибольшее, если нужно найти наибольшее значение функции
- или сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках минимума, и выбираем из них наименьшее, если нужно найти наименьшее значение функции.

Изложенный выше метод поиска наибольших и наименьших значений функции применим к решению разнообразных прикладных задач. При этом действуют по следующей схеме:

1. задача «переводиться» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр *x*, через который интересующую нас величину выражают как функцию f(*x*);

2.средствами анализа ищется наибольшее и наименьшее значение этой функци и на некотором промежутке;

3. выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат

Пример 1

Число 4 разложите на 2 слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение:

Пусть x – одно слагаемое. Тогда (4 – x) – второе слагаемое.

$f(x) = x(4 - x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 4 - 2x$

Решим $f'(x) = 0$

$4 - 2x = 0$

$4 = 2x$

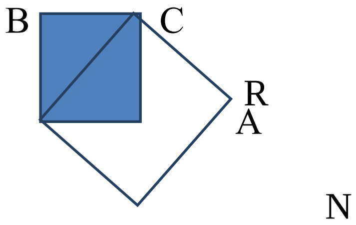
$x = 2$

Ответ :2;2

Пример 2

Данный отрезок, равный 12см, требуется согнуть под прямым углом так, чтобы площадь квадрата, построенного на отрезке, соединяющем концы согнутого отрезка, была наименьшей.

Решение:



Дано:
AC=12см
$\angle B = 90°$
S_{ACRN} - наименьшая
Найти:AB

Решение:

AB+BC=12 см

Пусть AB=x см, тогда BC=12-x

$S_{ACRN} = AC^2$

По теореме Пифагора $AC^2 = (12 - x)^2 + x^2$

$f(x) = 2x^2 - 24x + 144$

$f'(x) = 4x - 24$

Решим $f'(x) = 0$

$4x - 24 = 0$

$4x = 24$

$x = 6$

Ответ: AB=BC=6 см

Пример 3 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$ на отрезке $[1; 4]$

Решение:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$

1.D(f): x $\in (-\infty; +\infty)$

2. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 8$

3.Критические точки. Решим $f'(x)$=0

$3x^2 - 4x + 8 = 0$

D< 0 – критических точек нет

4.Значение функции в концах отрезка

f (1) =3–4+8=5

f(4)=$3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 8 = 62$

Ответ: max f(x)=f (4) =62   min f(x)=f (1) =5

Алгоритм нахождение экстремумов функции:

1. Найти ОДЗ функции
2. Найти производную $f'(x)$ данной функции.

3 . Найти критические точки, т.е. $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

4. Исследовать знак $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если производная $f'(x)$ изменяет знак при переходе через критическую точку, то функция имеет в этой точке экстремум, а если $f'(x)$ не изменяется, то функция в этой точке экстремума не имеет.

Пример 4 Найдите точки экстремумов функции $y = x^3 + 6x^2$ на интервале $(-5; -\frac{1}{5})$.

Решение:

$y = x^3 + 6x^2$

1.D(f): x $\in (-\infty; +\infty)$

2. $y' = 3x^2 + 12x$

3.Критические точки. Решим $f'(x)$=0

$3x^2 + 12x = 0$

3x(x+4)=0

x=0 или x+4=0

x=-4

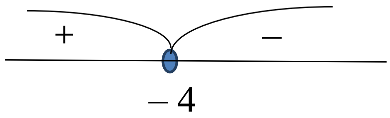
4. $x=0 \notin \left(-5; -\frac{1}{5}\right)$

$x=-4 \in \left(-5; -\frac{1}{5}\right)$

5. Исследовать знак $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f(x)$.

$y'(-4{,}5) = 6{,}75 > 0$

$y'(-1) = -9 < 0$



x= – 4 точка максимума

Ответ: x = -4 максимум

Глава 7. «Первообразная и интеграл. Площадь фигуры, ограниченная линиями»

Введение интеграла в школьный курс математики направлено на усвоение понятия интеграла и первообразной, а так же ознакомление учащихся с применением интеграла.

Пример 1

Для функции f найдите первообразную F, график которой проходит через точку M и постройте график функции F, если

$$f(x) = \cos(2\pi - x), M\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$$

Решение.

Представим функцию f(x) в следующем виде:

$$f(x) = \cos(2\pi - x) = cosx$$

Тогда общий вид первообразных для полученной функции:

$$F(x) = \sin x + C$$

Из множества всех первообразных найдем ту, которая удовлетворяет соотношению $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

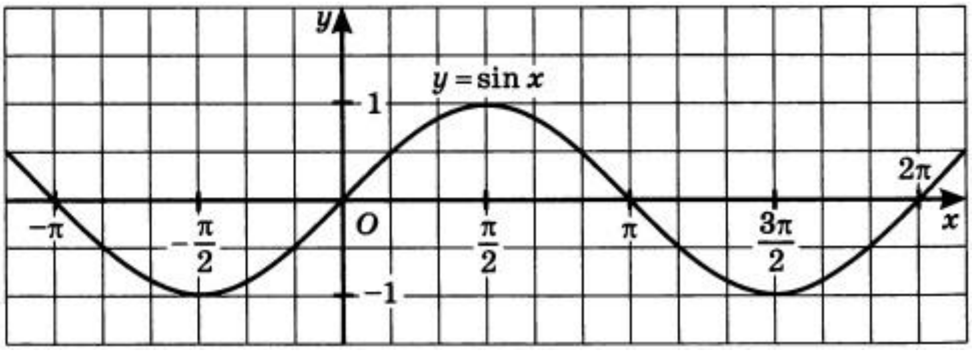
$$-1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$-1 = -\sin\frac{\pi}{2} + C$$

$$-1 = -1 + C$$

C=0

Таким образом, C=0, $F(x) = \sin x$



При вычислении определенного интеграла, прежде чем «считать» интеграл, нужно убедиться, что на отрезке интегрирования существует первообразная подынтегральной функции. Чтобы избежать недоразумений, перед формальным интегрированием следует установить, непрерывна ли заданная функция**.**

Пример 2. Вычислить интеграл: $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x+1)^3\,dx$

Решение.

Функция $f(x) = (2x+1)^3$ непрерывна на промежутке интегрирования, так как область определения функции $x \in R$,значит первообразная для функции существует.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^4}{4}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{(2\cdot\frac{3}{2}+1)^4}{8} - \frac{(2\cdot\frac{1}{2}+1)^4}{8} = 32 - 2 = 30$$

Ответ: 30

Задача вычисления площади фигуры с помощью интеграла всегда сводится к вычислению площадей криволинейных трапеций. Площади криволинейных трапеций можно вычислить и не строя эти фигуры. Но это доступно не многим учащимся. Поэтому необходимо выполнять чертежи.

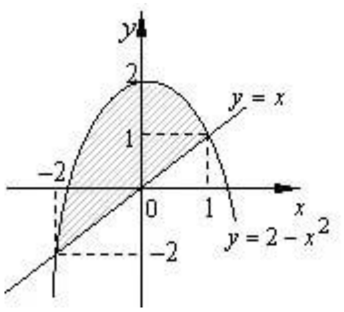
Не выполнение чертежа считается ошибкой.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = 2 - x^2; y = x$

Решение.

Построим фигуру, площадь которой надо найти: $y = 2 - x^2$- квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви – вниз, (0; 2) – вершина параболы; $y = x$– прямая пропорциональность, график – прямая, которая является биссектрисой углов I и III четверти.

Построим эскиз графиков



Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения графиков функций $y = 2 - x^2$и $y = x$, то есть приравняем правые части данных функций и решим полученное уравнение.

$2 - x^2 = x$

$2 - x^2 - x = 0$

$-x^2 - x + 2 = 0 \mid \cdot(-1)$

$x^2 + x - 2 = 0$

Так как $a + b + c = 0$(частный случай), то $x_1 = 1; x_2 = -2$

Таким образом, $x = -2$ –нижний предел интегрирования, $x = 1$верхний предел интегрирования.

На интервале интегрирования $[-2;1]$ график параболы $y = 2 - x^2$лежит выше прямой $y = x$, следовательно, площадь фигуры вычисляется как следующий определенный интеграл:

$$S_{\phi} = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) \Big|_{-2}^{1} = \left(2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ кв.ед}$$

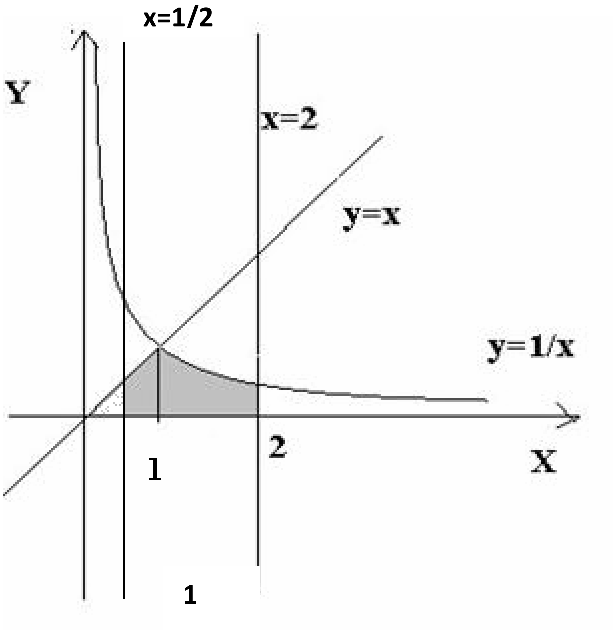
Ответ: $4\frac{1}{2}$кв. ед.

Пример 4. Вычислить объем тела, полученного путем вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями.

$y=\frac{1}{x}; y=0; x=\frac{1}{2}; x=2; y=x.$

Решение.

Построим эскиз графиков



Объем тела вращения можно найти, разбив тело на две части: первая часть –это усеченный конус, полученный в результате вращения прямой $y=x$ при $\frac{1}{2} \le x \le 1$; вторая часть – это фигура, полученная вращением гиперболы $y=\frac{1}{x}$ при $1 \le x \le 2$

$V_T = V_1 + V_2$

$$V_1 = \pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}\text{ куб.ед}$$

$$V_2 = \pi\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\frac{\pi}{x}\Big|_1^2 = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}\text{ куб.ед}$$

$$V_T = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{24}\text{ куб.ед}$$

Ответ: $\frac{19\pi}{24}$ куб.ед

Глава 8. «Преобразование алгебраических выражений»

В данных разделах содержатся задания на разложение на множители, упрощение целых выражений, дробно-рациональных, применение свойств степени, преобразование иррациональных выражений. При этом надо отметить, что ряд заданий выходят за рамки программы: задания, содержащие корень n-ной степени и степень с дробным показателем.

При выполнении заданий данных разделов учащиеся должны продемонстрировать умение находить корни квадратного трехчлена, применять различные способы разложения на множители (вынесение общего множителя за скобки, применение ФСУ, способ группировки, разложение квадратного трехчлена на множители), правила преобразования целых выражений, выполнения действий над рациональными дробями, сокращения дробей, избавления от иррациональности в знаменателе дроби, знание свойств степени и арифметического квадратного корня и умение применять их на практике.

При этом желательно придерживаться следующих рекомендаций

✓ при решении заданий на упрощение выражений учащийся не должен находить область определения данного выражения и ее изменение в процессе преобразований,

✓ если задание содержит требование найти значение выражения, то необходимо сначала выполнить преобразования для упрощения данного выражения и только затем подставлять значение переменной и производить вычисления,

✓ решение заданий на преобразование выражений предполагает, как правило, последовательное упрощение данного выражения, при этом используются правила умножения многочленов, формулы сокращенного умножения. Является недочетом неиспользование соответствующей формулы, и сильный ученик должен показать умение применять ФСУ в данной конкретной ситуации,

✓ форму записи при решении заданий на упрощение выражений или вычисление их значений учащийся может выбирать сам (цепочка равенств, выполнение преобразований по действиям и т.д.),

✓ решение данных заданий не предусматривает пространных комментариев. Вместе с тем, целесообразно требовать от ученика записи проводимых преобразований с такой степенью подробности, которая позволит проследить логику последовательности преобразований при проверке.

Типичными ошибками при решении заданий этих разделов являются ошибки при нахождении НОЗ, если пропущен этап разложения знаменателей на множители, ошибка в знаках при раскрытии скобок и способе группировки, ошибки при применении формулы

$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ и раскрытии знака модуля, применении ФСУ, вычислительные ошибки.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Упростите выражение:

$$\frac{à^2 - b^2}{2a} \cdot \left(\frac{ab}{à^2 - b^2} + \frac{b}{2b - 2a} \right)$$

1 способ

$$1)\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right)=\frac{ab}{(a-b)(a+b)}-\frac{b}{2(a-b)}=$$

$$=\frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)(a+b)}=\frac{2ab-ab-b^2}{2(a-b)(a+b)}=\frac{ab-b^2}{2(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{b(a-b)}{2(a-b)(a+b)}=\frac{b}{2(a+b)}$$

$$2)\ \frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{b}{2(a+b)}=\frac{(a-b)(a+b)b}{2a\cdot 2(a+b)}=\frac{(a-b)b}{4a}$$

2 способ

$$\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right)=\frac{(a^2-b^2)ab}{2a(a^2-b^2)}+\frac{(a^2-b^2)b}{2a(2b-2a)}=$$

$$\frac{b}{2}-\frac{(a-b)(a+b)b}{4a(a-b)}=\frac{b}{2}-\frac{(a+b)b}{4a}=\frac{2ab-ba-b^2}{4a}=\frac{ab-b^2}{4a}$$

3 способ

$$\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right)=\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\left(\frac{ab}{(a-b)(a+b)}-\frac{b}{2(a-b)}\right)=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{2ab-ab-b^2}{2(a-b)(a+b)}=\frac{(a^2-b^2)(ab-b^2)}{2a\cdot 2(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{ab-b^2}{4a}$$

Ответ: $\frac{ab-b^2}{4a}$

Пример 2. Представьте выражение в виде степени: $\frac{a^{12}+a^8+a^2}{a^{-12}+a^{-6}+a^{-2}}$

$$\frac{a^{12}+a^8+a^2}{a^{-12}+a^{-6}+a^{-2}}=\frac{a^2\cdot(a^{10}+a^6+1)}{a^{-12}\cdot(1+a^6+a^{10})}=\frac{a^2}{a^{-12}}=a^2\cdot a^{12}=a^{14}$$

Ответ: a^{14}

Пример 3. Упростите выражение: $\sqrt{m^2-2m+1}$, при $m\le 1$

Решение :

$$\sqrt{m^2-2m+1}=\sqrt{(m-1)^2}=|m-1|=-(m-1)=1-m,$$

т.к. при $m\le 1$, $m-1\le 0$

Пример 4. Упростите выражение:

$$\left(\frac{2-m}{2+m}-\frac{m+2}{m-2}\right)\div\left(\frac{2+m}{2-m}+\frac{m-2}{m+2}\right)=\left(\frac{2-m}{2+m}+\frac{m+2}{2-m}\right)\div\left(\frac{2+m}{2-m}-\frac{2-m}{m+2}\right)=$$

$$=\frac{(2-m)^2+(2+m)^2}{(2-m)(2+m)}\div\frac{(2+m)^2-(2-m)^2}{(2-m)(2+m)}=\frac{4-4m+m^2+4+4m+m^2}{4-m^2}\div$$

$$\div\frac{(2+m-2+m)(2+m+2-m)}{4-m^2}=\frac{(8+2m^2)(4-m^2)}{(4-m^2)2m\cdot 4}=\frac{2(4+m^2)}{2m\cdot 4}=\frac{4+m^2}{4m}$$

Ответ: $\frac{4+m^2}{4m}$

Пример 5. Упростите выражение

$$\frac{\grave{a}+b}{a^2-4b+4a-b^2}\cdot\frac{16-b^2-\grave{a}^2-2ab}{a^2+ab}=$$

1) $\frac{\grave{a}+b}{(a^2-b^2)+4(a-b)}=\frac{\grave{a}+b}{(a-b)(a+b+4)}$

2) $\frac{16-b^2-\grave{a}^2-2ab}{a^2+ab}=\frac{16-(\grave{a}^2+2ab+b^2)}{a(a+b)}=\frac{16-(\grave{a}+b)^2}{a(a+b)}=$

$=\frac{(4-(\grave{a}+b))(4+(\grave{a}+b))}{a(a+b)}=\frac{(4-\grave{a}-b)(4+\grave{a}+b)}{a(a+b)}$

3) $\frac{(\grave{a}+b)(4-\grave{a}-b)(4+\grave{a}+b)}{(a-b)(a+b+4)a(a+b)}=\frac{4-\grave{a}-b}{a(a-b)}$

Ответ: $\frac{4-a-b}{a(a-b)}$

Глава 9. «Алгебраические уравнения, неравенства и их системы»

5. D<0. Так как $(x+\frac{b}{2a})^2\geq 0$, для любого x, а $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)>0$

   при $D<0$, и следовательно:

   III. если $\text{а}>0$, то $\text{ах}^2+\text{вх}+\text{с}>0$ для всех х.

   IV. если $\text{а}<0$, то $\text{ах}^2+\text{вх}+\text{с}<0$ для всех х.

6. D$=0$.

   V. неравенство $\text{ах}^2+\text{вх}+\text{с}>0$ имеет решением любое $\text{х}\neq-\frac{\text{в}}{2\text{а}}$, если $\text{а}>0$, и не имеет решения, если $\text{а}<0$;

   VI. неравенство $\text{ах}^2+\text{вх}+\text{с}<0$ имеет решением любое $\text{х}\neq-\frac{\text{в}}{2\text{а}}$, если $\text{а}<0$, и не имеет решений, если $\text{а}>0$;

   VII. неравенство $\text{ах}^2+\text{вх}+\text{с}\geq 0$ имеет решения любое х, если $\text{а}>0$, и единственное решение $\text{х}=-\frac{\text{в}}{2\text{а}}$, если $\text{а}<0$;

VIII. неравенство $ax^2 + вx + c \leq 0$ имеет решением любое x, если $a < 0$, и $x = -\frac{в}{2a}$, если $a > 0$.

7. $D > 0$. В этом случае квадратный трехчлен можно представить в виде $ax^2 + вx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Учитывая сказанное, составляем список указаний для решения неравенства методом интервалов:

1) Разложим левую часть неравенства на линейные множители.
2) Преобразуем неравенство так, чтобы коэффициенты при переменной в каждом двучлене были равны +1

3) На числовой прямой отмечаем значения переменной, при которых обращаются в нули двучлены. (Проверяем: точки 0 и 1 не должны быть в этих точках.)
4) «Зачерняем» те из отмеченных точек, которые удолетворяют неравенству, остальные – оставляем «пустыми».
5) Устанавливаем знак левой части в каждом интервале, учитывая свойства непрерывной функции.
6) Штрихуем интервалы, которые удовлетворяют неравенству.
7) Записываем ответ.

Пример1. Решить неравенство $3(x - 1) < x - 3$

1 – способ решения:

$3(x - 1) < x - 3$

$3x - 3 < x - 3$

$2x < 0$

$x < 0$

Ответ: $x < 0$

2 – способ решения:

Графическое решение неравенства

$3(x - 1) < x - 3$

$3x - 3 < x - 3$

$2x < 0$ Левая часть неравенства, т.е. $2x$, есть линейная функция аргумента x; обозначим ее через y:

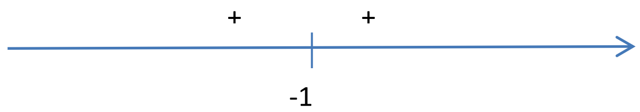
$y=2x$

и построим ее график. Неравенство $2x > 0$ означает, что ищутся такие значения аргумента x, при которых линейная функция положительна, т.е. ординаты примой положительны.
Ответ: $(-\infty;0)$

Пример 2. Решить уравнение $y = \sqrt{36 - 5x - x^2}$
Решение: О.Д.З: $36-5x-x^2 \geq 0$,
Аналогично если a – отрицательное число, то, умножив неравенство $36-5x-x^2 > 0$, на -1, получим равносильное ему нераветство. $x^2 + 5x - 36 < 0$.
Сначала решим уравнение $x^2 + 5x - 36 = 0$,
$D = b^2 - 4ac = 25 + 144 = 169 > 0$, то трехчлен $x^2 + 5x - 36$ имеет два корня: $x_1 = -9$, $x_2 = 4$. Затем решим неравенство $x^2 + 5x - 36 < 0$.
Поэтому неравенство можно переписать в виде $(x+9)(x-4) < 0$. Отметим на координатной оси Ox точки -9 и 4. Лекго видеть, что выражение $(x+9)(x-4)$ положительно для любого x, расположенного правее точки 4, отрицательно для любого x, расположенного между точками -9 и 4, положительно для любого x, расположенного левее точки -9.
Объединяя решения-неравенства и уравнения, получаем, что множество всех решений неравенства составляет отрезок $[-9; 4]$.
Ответ : $x \in [-9; 4]$

Глава 10. «Иррациональные уравнения и их системы»

Пример 1. Решите уравнение: $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2$
1 способ: $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2$
ОДЗ: $x^2 + 2x + 1 \geq 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$D = b^2 - 4ac$
$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
$x = -1$



$x \in R$

ОДЗ: $x \in R$
$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2 - 1$
$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 3$
Решение данного уравнения равносильно решению системы

$$\begin{cases} 3x-3\geq 0 \\ x^2+2x+1=(3x-3)^2 \end{cases};\begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+2x+1=9x^2-18x+9 \end{cases}$$

$$x^2+2x+1=9x^2-18x+9$$

$$-8x^2+20x-8=0|:(-4)$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$D=b^2-4ac=25-4\cdot 2\cdot 2=9$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{5+3}{4}=2$$

$$x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}\quad\notin[1;+\infty)$$

Ответ: 2

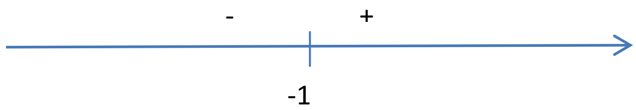
2 способ: $1+\sqrt{(x+1)^2}=3x-2\,,\qquad \sqrt{a^2}=|a|$

$$1+|x+1|=3x-2$$

$$3-3x+|x+1|=0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$



Данное уравнение рассмотрим на двух промежутках

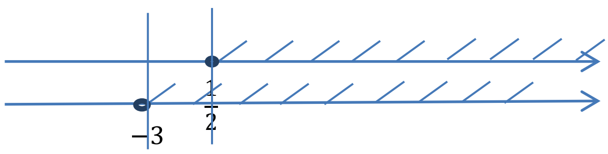
$x\in(-\infty;-1)$	$x\in[-1;+\infty)$
т.к. $x+1<0, то$	$т.к.\ x+1>0, то$
$3-3x-(x+1)=0$	$3-3x+(x+1)=0$
$3-4x-1=0$	$4-2x=0$
$2-4x=0$	$x=2\ \in[-1;+\infty)$
$x=0{,}5\ \notin\ (-\infty;-1)$	

Ответ: 2

Пример 2. Решить уравнение: $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}=\sqrt{2x-1}$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}=\sqrt{2x-1}$$

$$ОДЗ:\ \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x+3>0 \end{cases};\begin{cases} x\geq\frac{1}{2} \\ x>-3 \end{cases};$$



$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

решение данного уравнения равносильно решению системы

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \frac{(x+1)^2}{x+3} = 2x-1 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -1 \\ \frac{x^2+2x+1}{x+3} = \frac{2x-1}{1} \end{cases}; x^2+2x+1 = (2x-1)(x+3)$$

$$x^2 - 2x^2 + 2x - 5x + 4 = 0$$

$$-x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$a = -1 \quad b = -3 \quad c = 4$$

$$\text{если} \quad a+b+c = 0, \text{то} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 = 1 \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), \quad x_2 = -4 \notin [-1; +\infty)$$

Ответ: 1

Пример 3. Решите уравнение: $(x+1)\sqrt{5x^2+22x-15} = 0$

$$ОДЗ: 5x^2 + 22x - 15x \geq 0$$

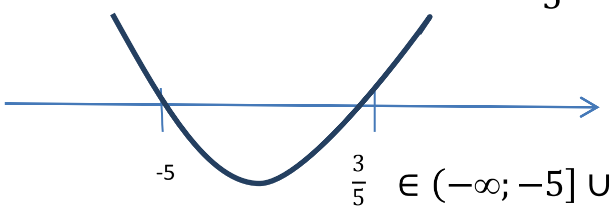
$$5x^2 + 22x - 15 = 0$$

$$b = 2n, \text{тогда} \ D = n^2 - ac = 121 - 5 \cdot (-15) = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{D}}{a}$$

$$x_1 = \frac{-11+14}{5} = \frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{-11-14}{5} = -5$$



$\in (-\infty; -5] \cup [\frac{3}{5}; +\infty)$

произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, при этом остальные множители существуют.

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1 \ \text{не удовлетворяет ОДЗ}$$

или $\sqrt{5x^2+22x-15} = 0$

$$5x^2 + 22x - 15 = 0$$

$$b = 2n, \text{тогда} \ D = n^2 - ac = 121 - 5 \cdot (-15) = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{D}}{a}$$

$$x_1 = \frac{-11+14}{5} = \frac{3}{5} \in [\frac{3}{5}; +\infty)$$

$$x_2 = \frac{-11-14}{5} = -5 \in (-\infty; -5]$$

Ответ: -5, $\frac{3}{5}$

Пример 4. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x^2 + 14x - 16} = -4$

$\sqrt[3]{x^2 + 14x - 16} = -4$ корень нечетной степени, поэтому $x \in R$ *обе части уравнения возведем в куб*

$x^2 + 14x - 16 = -64$

$x^2 + 14x + 48 = 0$

по теореме Виета

$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 48 \\ x_1 + x_2 = -14 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

Ответ: –8;–6

Пример 5.Решите уравнение: $(x + 2)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6x + 12$

$$(x + 2)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6x + 12$$

$$(x + 2)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6(x + 2), \quad \textit{если } x \neq 2, \textit{то}$$

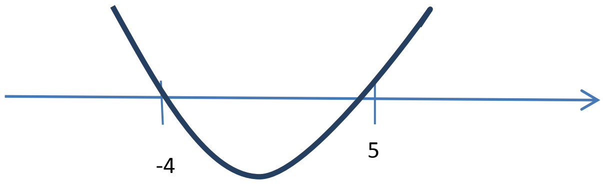
$$(x + 2)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6(x + 2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 20} = 6$$

$$\textit{ОДЗ}: \; x^2 - x - 20 \geq 0$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$\left(\sqrt{x^2 - x - 20}\right)^2 = 6^2$$

$$x^2 - x - 20 = 36$$

$$x^2 - x - 56 = 0$$

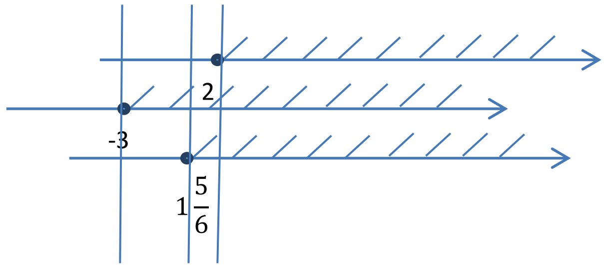
по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -56 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -7 \in (-\infty; -4] \\ x_2 = 8 \in [5; +\infty) \end{cases};$$

Ответ: –7; 8

Пример 6. Решите уравнение: $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6x - 11}$

$$ОДЗ:\ \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x+3\geq 0 \\ 6x-11\geq 0 \end{cases};\ \begin{cases} x\geq 2 \\ x\geq -3 \\ x\geq 1\dfrac{5}{6} \end{cases};$$



$$x\in[2;+\infty)$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{6x-11}\right)^2$$

$$(\sqrt{x-2})^2+2\sqrt{(x-2)(x+3)}+(\sqrt{x+3})^2=6x-11$$

Уединим радикал в левой части уравнения

$$2\sqrt{(x-2)(x+3)}=6x-11-x+2-x-3$$

$$2\sqrt{x^2+x-6}=4x-12\ \vdots\ 2$$

$$\sqrt{x^2+x-6}=2x-6$$

Решение данного уравнения равносильно решению системы

$$\begin{cases} 2x-6\geq 0 \\ x^2+x-6=(2x-6)^2 \end{cases};\begin{cases} x\geq 3 \\ 3x^2-25x+42=0 \end{cases}$$

$$3x^2-25x+42=0$$

$$D=b^2-4ac=625-504=121$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{25+11}{6}=6\ \in[2;+\infty)$$

$$x_2=\frac{25-11}{6}=2\frac{1}{3}\ \textit{не является решением системы}$$

Ответ: 6

Пример 7 Решить систему уравнений: $\begin{cases} 9x+y+6\sqrt{xy}=100 \\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x+y+6\sqrt{xy}=100 \\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2 \end{cases};\begin{cases} (3\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=100 \\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2 \end{cases}$$

Решение данной системе равносильно совокупности систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2\end{cases}\\ \begin{cases}3\sqrt{x}+\sqrt{y}=-10\\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим каждую систему, используем способ сложения

$$\begin{cases}3\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2\end{cases} -$$

$4\sqrt{x}=8$

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

$\sqrt{y}-2=2$

$\sqrt{y}=4$

$y=16$

$$\begin{cases}3\sqrt{x}+\sqrt{y}=-10\\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2\end{cases} -$$

$4\sqrt{x}=-12$

$\sqrt{x}=-3$

Не удовлетворяет определению корня квадратного

Ответ: (4;16)

Пример 8. Решите неравенство. $\sqrt{x^2-6x+8}\geq -1$

$$f(x)=x^2-6x+8\ ;\ \ g(x)=-1$$

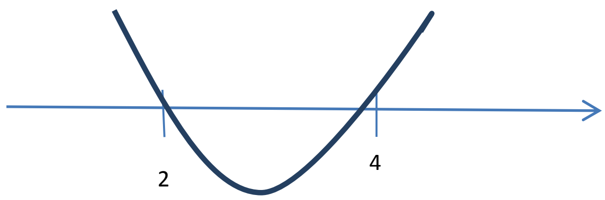
Решение данного неравенства равносильно решению следующей системы

$$\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\geq 0\end{cases} \Rightarrow x^2-6x+8\geq 0$$

$$x^2-6x+8=0$$

по теореме Виета

$$\begin{cases}x_1\cdot x_2=8\\ x_1+x_2=6\end{cases};\ \begin{cases}x_1=2\\ x_2=4\end{cases}$$



$$x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$$

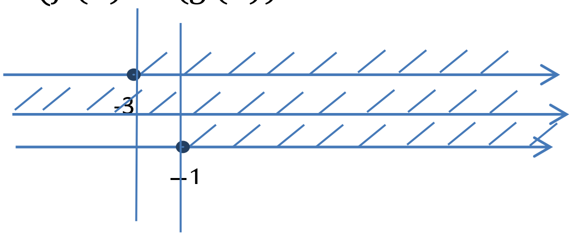
Ответ: $x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$

Пример 9. Решите неравенство $\sqrt{x^2+3}<x+3$

$$f(x)=x^2+3\ ;\ \ g(x)=x+3$$

Решение данного неравенства равносильно решению следующей системы

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2+3 \geq 0 \\ x^2+3 < (x+3)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > -3 \\ x \in R \\ x^2+3 < x^2+6x+9 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > -3 \\ x \in R \\ x > -1 \end{cases}$$



$x \in (-1; +\infty)$

Ответ: $x \in (-1; +\infty)$

Пример 10 Решите неравенство: $\sqrt{9x^2 - x - 10} \geq 3x - 2$

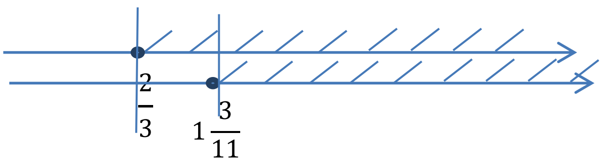
$$f(x) = 9x^2 - x - 10 \ ; g(x) = 3x - 2$$

Решение данного неравенства равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq \left(g(x)\right)^2 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

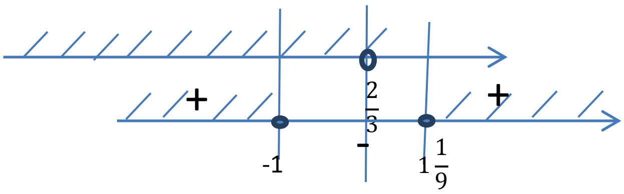
Решим каждую из них

$$\begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 9x^2 - x - 10 \geq (3x-2)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 9x^2 - x - 10 \geq 9x^2 - 12x + 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \geq 1\frac{3}{11} \end{cases}$$



$x \in [1\frac{3}{11}; +\infty)$

$$\begin{cases} 3x-2 < 0 \\ 9x^2 - x - 10 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ (x+1)(9x+10) \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x \in (-\infty; -1] \cup \left[1\frac{1}{9}; +\infty\right) \end{cases}$$



$x \in (-\infty; -1]$

Ответ: $x \in [1\frac{3}{11}; +\infty)$ и $x \in (-\infty; -1]$

Глава 11. «Показательные уравнения, неравенства и их системы»

Решая задания этого раздела, учащиеся должны продемонстрировать знание определение показательных неравенств, методов их решения; умение решать неравенства различными методами. При подготовке учащихся к итоговой аттестации по этой теме следует обратить внимание на применение свойств показательной функции при решении показательных неравенств.

Определение: Показательными неравенствами называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где a>0 и a≠1.

Простейшие показательные неравенства имеют вид

$a^x < b,\ a^x > b,$ где $a \neq 1, a > 0.$

При $b \leq 0$ неравенство $a^x < b$ решений не имеет, а неравенство $a^x > b$ выполняется при всех значениях аргумента, поскольку $a^x > 0$. При $b > 0$ выполняется равенство $a^{\log_a b} = b$. Если $a > 1$, то в силу возрастания показательной функции неравенство $a^x > b$ выполняется при $x > \log_a b$, а неравенство $a^x < b$ выполняется при $x < \log_a b$.Если $0 < a < 1$, то в силу убывания показательной функции неравенство $a^x > b$ выполняется при $x < \log_a b$, а неравенство $a^x < b$ выполняется при $x > \log_a b$.

Используя свойство монотонности показательной функции, делаем вывод, что неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Способы решения показательных неравенств:

- ✓ Метод приведения обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием;
- ✓ Метод введение новой переменной (замена переменной)
- ✓ Метод разложения на множители;
- ✓ Метод интервалов.

Пример 1.

Метод приведения обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием:

$$2 \cdot 0{,}5^{2-3x} \geq 4^{2x-1}$$

Представим левую и правую часть неравенства в виде степени с основанием 2

$$2 \cdot (\tfrac{1}{2})^{2-3x} \geq (2^2)^{2x-1}$$

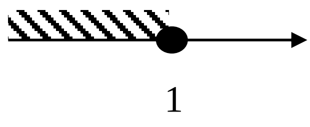
$$2 \cdot 2^{3x-2} \geq (2^2)^{2x-1}$$

Упростим, применяя свойства степени

$$2^1 \cdot 2^{3x-2} \geq 2^{4x-2}$$
$$2^{1+3x-2} \geq 2^{4x-2}$$
$$2^{3x-1} \geq 2^{4x-2}$$

Так как основание степени 2>1, то переходим к решению линейного неравенства, не изменяя знак неравенства

$$3x - 1 \geq 4x - 2$$
$$3x - 4x \geq -2+1$$
$$-x \geq -1 \quad | \cdot (-1)$$
$$x \leq 1$$
$$x \in (-\infty; 1]$$



Ответ : $x \in (-\infty; 1]$

Пример 2

Метод введение новой переменной (замена переменной)

$$0{,}04^x - 2 \cdot 0{,}2^x \leq 15$$

Представим левую часть неравенства в виде степени с основанием 0,2

$$(0{,}2)^{2x} - 2 \cdot 0{,}2^x \leq 15$$

Делаем замену переменной, приводящую к квадратному неравенству.

Пусть $0{,}2^x = y$ тогда

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 15 \leq 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

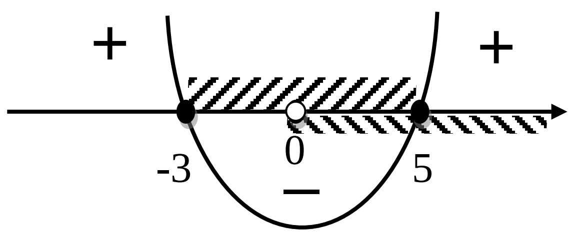
Решаем неравенство графическим методом, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём точки пересечения параболы с осью абсцисс:

$$y^2 - 2y - 15 \leq 0$$
$$a = 1, \; b = -2, \; c = -15$$

решаем приведённое квадратное уравнение по теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2, \\ y_1 \cdot y_2 = -15; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3, \\ y_2 = 5. \end{cases}$$

Схематично изображаем параболу



Расставляем знаки функции, отмечаем промежутки соответствующие решению каждого неравенства системы. Записываем решение системы:

$$0<y\leq 5$$

Переходим к исходной переменной, учитывая свойства показательной функции I

$$0{,}2^x \leq 5$$

Представляем правую часть неравенства в виде степени с основанием 0,2

$$0{,}2^x \leq 0{,}2^{-1}$$

Так как основание 0,2<1, то при переходе к линейному неравенству знак неравенства меняем на противоположный

$$x \geq -1$$

$$x \in [-1; +\infty)$$

Ответ : $[-1; +\infty)$

Пример 3

Метод разложения на множители

$$3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$$

Группируем степени с одинаковыми основаниями

$$3^{x^2+2} - 3^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 5^{x^2-1}$$

Применяем свойства степени для определения общего множителя слева и справа

$$3^{x^2} \cdot 3^2 - 3^{x^2} \cdot 3^{-1} > 5^{x^2} \cdot 5^1 + 5^{x^2} \cdot 5^{-1}$$

Выносим общий множитель, раскладываем на множители

$$3^{x^2} \cdot \left(9 - \frac{1}{3}\right) > 5^{x^2} \cdot (5 + \frac{1}{5})$$

$$3^{x^2} \cdot 8\frac{2}{3} > 5^{x^2} \cdot 5\frac{1}{5} \quad | : 8\frac{2}{3}$$

Переходим к показательному неравенству с одним основанием:

$$3^{x^2} > 5^{x^2} \cdot \frac{3}{5} \quad | : 5^{x^2}, \quad 5^{x^2} \neq 0$$

$$\frac{3^{x^2}}{5^{x^2}} >\cdot \frac{3}{5}$$

По свойству степени

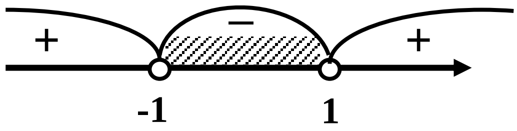
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} >\cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1$$

Так как основание $\frac{3}{5} < 1$, то при переходе к квадратичному неравенству знак неравенства изменяем на противоположный

$$x^2 < 1$$
$$x^2 - 1 < 0$$

Решаем методом интервалов

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \pm 1$$



$x \in (-1;\ 1)$

Ответ : $(-1;\ 1)$

Пример 4 ·

Метод интервалов:

$$\frac{64-4^x}{4x^2+12x+9} \geq 0$$

3) Приравниваем числитель и знаменатель дроби к нулю

$64 - 4^x = 0$

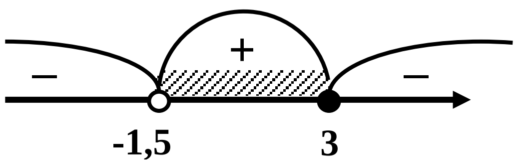
$64 = 4^x$

$x=3$

4) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ решаем квадратное уравнение методом выделения полного квадрата $(2x+3)^2 = 0$

$x = -1.5$

Отмечаем полученные значения на числовой прямой, x=3 изображается закрашенной точкой согласно условию, а x = – 1,5 пустой, так как является корнем квадратного трёхчлена стоящего в знаменателе. Расставляем знаки, используя метод интервалов:



$x \in (-1{,}5;3]$

Ответ: $(-1{,}5;3]$

Глава 12. «Логарифмические уравнения и неравенства и их системы»

Для решения логарифмических уравнений используются следующие способы: способ непосредственного применения определения логарифма;

приведение обеих частей уравнения к одинаковому основанию; введение новой переменной; потенцирование; способ почленного логарифмирования.

Пример 1.Решите уравнение

$$\log_4(3x-1)-\log_4(4-x)=2-\log_4(x-1)$$

ОДЗ: $\begin{cases}3x-1>0\\4-x>0\\x-1>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{3}\\x<4\\x>1\end{cases} \Rightarrow 1<x<4$

Заменим число 2 логарифмом нужного нам основания $2=\log_4 16$ и, используя свойство $\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$, получим:

$$\log_4(3x-1)+\log_4(x-1)=\log_4 16+\log_4(4-x)$$

$$\log_4\big((3x-1)(x-1)\big)=\log_4\big(16(4-x)\big)$$

Потенцируя, получим:

$$(3x-1)(x-1)=16(4-x)$$

$$3x^2-3x-x+1=64-16x$$

$$3x^2+12x-63=0$$

Разделив данное уравнение на 3, получим:

$$x^2+4x-21=0$$

Т.к. данное квадратное уравнение приведенное, то по теореме, обратной теореме Виета

$$\begin{cases}x_1+x_2=-4\\x_1\cdot x_2=-21\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=3\\x_2=-7\end{cases}$$

$$x_2=-7\notin \text{ОДЗ} \qquad x_1=3\in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 3

Пример 2.Решите уравнение

$$0{,}5\log_3(2x^2+1)=\log_3(2x-1)$$

ОДЗ: $2x-1>0$

$$x>\frac{1}{2}$$

Умножим обе части уравнение на 2, получим

$$\log_3(2x^2+1)=2\log_3(2x-1)$$

$$\log_3(2x^2+1)=\log_3(2x-1)^2$$

Потенцируя, получим:

$$2x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$
$$4x^2 - 4x - 2x^2 = 0$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x - 2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$x_1 = 0 \notin \text{ОДЗ} \qquad x_2 = 2 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 2

Пример 3. Решите уравнение $\log_4(4 - x) = 0{,}5\log_4(2x + 16)$

ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 2x + 16 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ x > -8; \end{cases}$ $-8 < x < 4.$

Умножим обе части уравнение на 2, получим

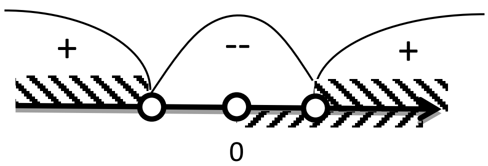
$$2\log_4(4 - x) = \log_4(2x + 16)$$
$$\log_4(4 - x)^2 = \log_4(2x + 16)$$
$$(4 - x)^2 = 2x + 16$$
$$16 - 8x + x^2 = 2x + 16$$
$$x^2 - 10x = 0$$
$$x(x - 10) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \text{или} \quad x - 10 = 0$$
$$x_2 = 10$$
$$x_1 = 0 \in \text{ОДЗ}, \quad x_2 = 10 \notin \text{ОДЗ}$$

Ответ: 0

Пример 4. Решите уравнение

$$\log_{0,2} 4x + \log_5(x^2 - 5) = 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x > 0 \\ x^2 - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0 \end{cases}$



$x \in (\sqrt{5}; +\infty)$

Приводим логарифмы к одному основанию, равному 5

$$\log_{\frac{1}{5}} 4x + \log_5(x^2 - 5) = 0$$

$$-\log_5 4x + \log_5(x^2 - 5) = 0$$

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5 4x$$

Потенцируя, получим

$$x^2 - 5 = 4x$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = -5$$

Т.к. выполняется свойство коэффициентов $a - b + c = 0$, то

$x_1 = -1, \quad x_2 = 5$

$$x_1 = -1 \notin \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = 5 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 5

Пример 5.Решите уравнение

$\log_{0,5}(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4) = -1$

Воспользуемся определением логарифма:

$$\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x + 4 = 0{,}5^{-1}$$

$$\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x + 4 = 2$$

$$\log_2^2 x - 3\log_{0,5} x + 2 = 0$$

Введём новую переменную t и относительно нее решим квадратное уравнение:

пусть $x = \log_2 t$, тогда t^2-3t+2=0

a=1, b= – 3, c=2

Т.к. выполняется свойство коэффициентов a+b+c=0, то

$t_2 = 1, \qquad t_2 = 2$

Вернемся к переменной *x* и решим простейшие логарифмические уравнения:

$\log_2 x = 1 \qquad \log_2 x = 2$

$x_1 = 2 \qquad x = 2^2$

$$x_2 = 4$$

Проверка:

при x=2 $\log_{0,5}(\log_2^2 2 - 3\log_2 2+4)=1$

$\log_{0,5}(1-3+4)= -1$

$\log_{0,5}2= -1$

$-1= -1$ верно, значит, x=2 является решением уравнения

при x=4 $\log_{0,5}(\log_2^2 4 - 3\log_2 4 + 4) = -1$

$\log_{0,5}(2^2 - 3 * 2 + 4) = -1$

$\log_{0,5}(4-6+4)= -1$

$\log_{0,5}2= -1$

$-1= -1$ верно, значит x=4 является решением уравнения

Ответ: 2;4

Пример 6. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{16}} x + \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = -7$

ОДЗ: $x > 0$

Приведем логарифму к одному основанию, равному $\frac{1}{2}$,получим

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^4} x + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} x + \log_{\frac{1}{2}} x = -7$$

$$\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = -7$$

Приведем подобные слагаемые и решим полученное уравнение:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)\log_{\frac{1}{2}} x = -7$$

$$\frac{1+2+4}{4} * \log_{\frac{1}{2}} x = -7$$

$$\frac{7}{4}\log_{\frac{1}{2}} x = -7$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -7 \cdot \frac{4}{7}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -4$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$x=2^4$

x=16

$x = 16 \in$ ОДЗ

Ответ: 16

Пример 7. Решите уравнение $\frac{1}{4-\lg x} + \frac{2}{2+\lg x} = 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 4 - lgx = 0, \\ 2 + lgx \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ lgx \neq 4\,, \\ lgx \neq -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 10.000, \\ x \neq 0{,}01. \end{cases}$

x∈(0;0,01) ∪ (0,01;10.000) ∪ (10.000;+∞)

Избавимся от дробности. Умножив обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей $(4 - \lg x)(2 + \lg x) \neq 0$, получим:

(2+lgx)+2(4-lgx)=(4-lg x)(2+lgx)

2+lgx+8-2lgx=8+4lgx-2lgx-$\lg^2$x

10-lgx=8+2lgx-$\lg^2$x

$\lg^2$x-3lgx+2=0

Введём новую переменнуюt и решим относительно нее квадратное уравнение:

Пусть lgx=t, тогда t^2-3t+2=0

a=1, b= – 3, c=2

Т.к. выполняется свойство коэффициентов a+b+c=0, то

$t_1 = 1, t_2 = 2$

Найдем искомые значения x: lgx=1 lg=2

$x_1 = 10 \in$ ОДЗ $x_2 = 100 \in$ ОДЗ

Ответ: 10;100

При решении систем логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (способы подстановки, алгебраического сложения, введения новых переменных и др.)

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(2x + y) + \log_3(2x - y) = 1 \\ \log_3(2x + y) - \log_3(2x - y) = 1 \end{cases}$$

Почленно сложив данные уравнения, получим

$$2\log_3(2x+y)=2$$

Разделив обе части уравнения на 2, преобразуем его по определению логарифма

$$\log_3(2x+y)=1$$

$$2x+y=3$$

Исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ \log_3(2x+y)+\log_3(2x-y)=1 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим переменную y через x: y=3–2x

Подставим вместо y полученное выражение во второе уравнение системы и решим его:

$$\log_3(2x+3-2x)+\log_3\big(2x-(3-2x)\big)=1$$

$$\log_3 3+\log_3(4x-3)=1$$

$$1+\log_3(4x-3)=1$$

$$\log_3(4x-3)=0$$

$$4x-3=1$$

$$4x=4$$

$$x=1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3-2\cdot 1 \end{cases};\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

<u>Проверка:</u>

При x=1, y=1 $\begin{cases} \log_3(2\cdot 1+1)+\log_3(2\cdot 1-1)=1 \\ \log_3(2\cdot 1+1)-\log_3(2\cdot 1-1)=1 \end{cases};$

$\begin{cases} \log_3 3+\log_3 1=1 \\ \log_3 3-\log_3 1=1 \end{cases}; \begin{cases} 1+0=1 \\ 1-0=1 \end{cases};\begin{cases} 1=1 \\ 1=1 \end{cases}$ – верно,

значит (1;1) является решением данной системы уравнений.

Ответ: (1;1)

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8 \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x + y) = 0{,}5 \end{cases}$$

Преобразуем каждое уравнение системы:

1) $2^{\log_2(3x-4)} = 8$

По основному логарифмическому тождеству имеем:

3x–4=8

3x=12

x=4

2) $\log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x + y) = 0{,}5$

По свойству логарифма $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$ имеем:

$$\log_9 \frac{x^2 - y^2}{x + y} = 0{,}5$$

$\log_9 \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = 0{,}5,$

при $\mathrm{x} + \mathrm{y} \neq 0$ $\log_9(x - y) = 0{,}5$

По определению логарифма:

$$\mathrm{x} - \mathrm{y} = 9^{0{,}5}$$

$$\mathrm{x} - \mathrm{y} = \sqrt{9}$$

$$\mathrm{x} - \mathrm{y} = 3$$

$\begin{cases} \mathrm{x} = 4 \\ x - \mathrm{y} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \mathrm{x} = 4 \\ 4 - \mathrm{y} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \mathrm{x} = 4 \\ \mathrm{y} = 1 \end{cases}$

<u>Проверка:</u>

При x=4, y=1 $\begin{cases} 2^{\log_2(3*4-4)} = 8 \\ \log_9(4^2 - 1^2) - \log_9(4 + 1) = 0{,}5 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2^{\log_2 8} = 8 \\ \log_9 15 - \log_9 5 = 0{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} 8 = 8 \\ \log_9 \frac{15}{5} = 0{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} 8 = 8 \\ \log_9 3 = 0{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} 8 = 8 \\ 0{,}5 = 0{,}5 \end{cases}$ –верно,

значит (4;1) является решением данной системы уравнений.

Ответ: (4;1)

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$

Преобразуем каждое уравнение системы:

1) Применяя формулу перехода к новому основанию, получим

$$\log_y x = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 y} - 2\log_2 y = 1$$

Умножим уравнение на $\log_2 y \neq 0$ и получим

$$\log_2 x - 2\log_2^2 y = \log_2 y$$

2) $\log_4 \frac{x}{y} = 1$

По определению логарифма $\frac{x}{y} = 4$

x=4y

Полученную систему уравнений решим способом подстановки:

$$\begin{cases} \log_2 x - 2\log_2^2 y = \log_2 y \\ x = 4y \end{cases}$$

По свойству логарифма $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

$$\log_2 4y = \log_2 4 + \log_2 y = 2 + \log_2 y \log_2 4y - 2\log_2^2 y = \log_2 y$$

$$2 + \log_2 y - 2\log_2^2 y = \log_2 y$$

$$2 - 2\log_2^2 y = 0$$

$$2 \cdot (1 - \log_2^2 y) = 0$$

$$1 - \log_2^2 y = 0$$

$$\log_2^2 y = 1$$

1) $\log_2 y = 1$

y=2, тогда x=8

2) $\log_2 y = -1$

$y = \frac{1}{2}$, тогда x=2

$\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Проверка:

1) при x=8, y=2 $\begin{cases}\log_2 8-\log_2 2^2=1\\ \log_4 8-\log_4 2=1\end{cases}$; $\begin{cases}3-2=1\\ \log_4\frac{8}{2}=1\end{cases}$; $\begin{cases}1=1\\ 1=1\end{cases}$ –верно,

значит (8;2) является решением данной системы уравнений.

2) при x=2, y = $\frac{1}{2}$ $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} 2-\log_2(\frac{1}{2})^2=1\\ \log_4 2-\log_4\frac{1}{2}=1\end{cases}$; $\begin{cases}-\log_2^2-2\log_2\frac{1}{2}=1\\ \log_4\frac{2}{\frac{1}{2}}=1\end{cases}$;

$\begin{cases}-1+2=1\\ \log_4 4=1\end{cases}$; $\begin{cases}1=1\\ 1=1\end{cases}$ – верно, значит $(2;\frac{1}{2})$ является решением данной системы уравнений.

Ответ: (8;2), $(2;\frac{1}{2})$.

Решение логарифмических неравенств в основном сводится к решению неравенств вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $(\log_a f(x)\geq\log_a g(x))$ или $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ $(\log_a f(x)\leq\log_a g(x))$.

Для решения таких неравенств, учитывая область определения логарифмической функции и ее свойства, пользуются следующими утверждениями:

3) при a> 1 неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x);\end{cases}$$

4) при 0 <a<1 неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x).\end{cases}$$

Также при решении логарифмических неравенств используются свойства логарифмов.

Пример 1. Решите неравенство

$\log_{0.2}(x^3+8)-0.5\log_{0.2}(x^2+4x+4)<\log_{0.2}(x+58)$ ОДЗ: $\begin{cases}x>-58\\ x>-2\end{cases}$ => x > –2

$\log_{0.2}(x^3+8) - 0.5\log_{0.2}(x+2)^2 < \log_{0.2}(x+58)$

$\log_{0.2}(x^3+8) - \log_{0.2}\sqrt{(x+2)^2} < \log_{0.2}(x+58)$

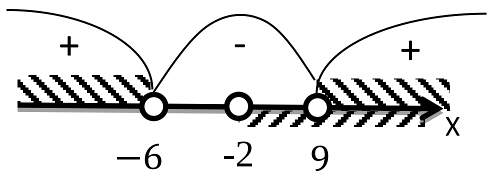
$\log_{0.2}\frac{x^3+8}{x+2} < \log_{0.2}(x+58)$

$x^2-2x+4 > x+58$

$x^2 - 3x - 54 > 0$

$x_1 = 9$

$x_2 = -6$



$x \epsilon\ (9; +\infty)$

Ответ: $(9; +\infty)$

Пример 2. Решите неравенство

$\log_{0.5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3} < 0$ $\qquad 0 = \log_{0.5} 1$

$$\log_{0.5}\log_8\frac{x^2+8x}{x-3} < \log_{0.5} 1 \quad <=> \quad \begin{cases} \log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > 0, \\ \log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > 1, \text{т.к. } 0 < 0.5 < 1 \end{cases} <=>$$

$<=> \log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > 1$ $\qquad 1 = \log_8 8$

$$\log_8\frac{x^2+8x}{x-3} > \log_8 8 \quad <=> \quad \begin{cases} \frac{x^2+8x}{x-3} > 0 \\ \frac{x+8x}{x-3} > 8, \ \text{т.к } \ 8 > 1 \end{cases} <=> \quad \frac{x^2+8x}{x-3} > 8$$

Решим полученное неравенство:

$$\frac{x^2+8x}{x-3} > 8$$

$$\frac{x^2+8x}{x-3} - 8 > 0$$

$$\frac{x^2+8x-8x+24}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2+24}{x-3} > 0$$

Т.к при любом x значение $x^2+24>0$, то

$x - 3 > 0$

$x > 3$

$x \in (3; +\infty)$

Ответ: $(3; +\infty)$

Пример 3. Решите неравенство

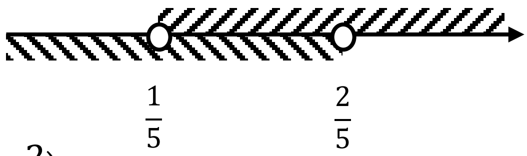
$$\frac{\log_{0,2}(2-5x)}{\log_{0,2}625} < 0$$

Дробь принимает отрицательные значения, если ее числитель и знаменатель противоположных знаков. Т.к. при любом значении x $\log_{0,2}625 < 0$, то имеем $\log_{0,2}(2-5x) > 0$

Заменим число 0 логарифмом по основанию 0,2: $0 = \log_{0,2}1$

$$\log_{0,2}(2-5x) > \log_{0,2}1 <=> \begin{cases} 2-5x > 0 \\ 2-5x < 1, \text{т.к.}\ 0 < 0{,}2 < 1 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} 5x < 2 \\ 5x > 1 \end{cases} => \begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > \frac{1}{5} \end{cases}$$



$$x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$

Пример 4. Решите неравенство $0{,}04 > 25^{\log_{25}(2-5x)}$

ОДЗ: $2-5x > 0$

$5x < 2$

$x < 0{,}4$

Воспользовавшись основным логарифмическим тождеством, получим линейное неравенство и решим его:

$0{,}04 > 2-5x$

$5x > 2 - 0{,}04$

$5x > 1{,}96$

$x > 0{,}392$

Чтобы найти решение данного логарифмического неравенства, изобразим решение линейного неравенства и промежуток ОДЗ на координатной прямой, и найдем общую часть:

$x \epsilon (0{,}392\,;0{,}4)$

Ответ:$(0{,}392\,;0{,}4)$

Пример5. Решите неравенство

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 6 - \log_2(3x+1)$$

Приведем логарифмы к одному основанию, равному $\frac{1}{2}$:

$$\log_2(3x+1) = -\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$$

Тогда имеем:

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 6 + \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$$

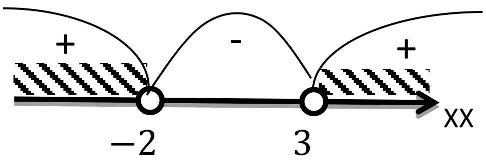
$$\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 6 > 0$$

Введем обозначение $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = t$, получим

$$t^2 - t - 6 > 0$$

Решим данное квадратное неравенство методом интервалов:

$$t^2 - t - 6 = 0, \qquad t_1 = 3, \;\; t_2 = -2$$



$t < -2, \qquad t > 3$

Заменим t на $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$, имеем

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < -2$ $\qquad -2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}}4$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{2}}4 <=> \begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x+1>4, \text{т.к.}\ 0<\frac{1}{2}<1 \end{cases} => 3x+1>4$$

$3x > 3$

$x > 1$

$x \in (1;+\infty)$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 3$ $\qquad 3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} \quad <=> \quad \begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x+1<\frac{1}{8}, \text{т. к. } 0<\frac{1}{2}<1 \end{cases} <=>$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ 3x < -\frac{7}{8} \end{cases} <=> \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{7}{24} \end{cases} <=> \quad -\frac{1}{3} < x < -\frac{7}{24} \qquad x \in \left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{24}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{24}\right) \cup (1; +\infty)$

Пример6. Решите неравенство

$$\log_{0,1}(x-2) - \lg x > \log_{0,1} 3$$

Приведем логарифм к одному основанию, равному 0,1: $\lg x = -\log_{0,1} x$

Имеем:

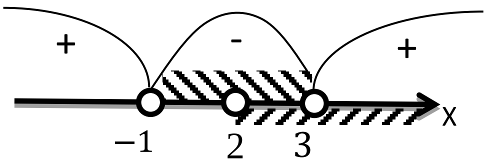
$$\log_{0,1}(x-2) + \log_{0,1} x > \log_{0,1} 3$$

Применяя свойство $\log_c a + \log_c в = \log_c(ав)$, получим:

$$\log_{0,1}\big(x(x-2)\big) > \log_{0,1} 3 \quad <=> \quad \begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \\ x(x-2)<3, \text{т. к. } 0<0,1<1 \end{cases} <=>$$

$$<=> \quad \begin{cases} x>2 \\ x>0 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} x>2 \\ (x-3)(x+1)<0 \end{cases}$$

Изображая решение каждого неравенства системы неравенств на координатной прямой, находим их общую часть:



$x \epsilon (2; 3)$

Ответ: (2;3)

Пример7. Решите неравенство

$$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} > 1$$

$$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} - 1 > 0$$

Левую часть неравенства приведем к знаменателю $\lg x - 1$, получим:

$$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3 - \lg x + 1}{\lg x - 1} > 0$$

$$\frac{\lg^2 x - 4\lg x + 4}{\lg x - 1} > 0$$

$$\frac{(\lg x - 2)^2}{\lg x - 1} > 0$$

Значение дроби может быть положительным, если числитель и знаменатель одного знака. А т.к. при любом $x > 0$ $(\lg x - 2)^2 > 0$, то

3) $\lg x - 1 > 0$

$\lg x > 1$ 1=lg10

$$\lg x > \lg 10 <=> \begin{cases} x > 0 \\ x > 10, \text{т. к } 10 > 1 \end{cases} <=> x > 10$$

4) $\lg x - 2 \neq 0$

$\lg x \neq 2$ $2 = \lg 100$

$$\lg x \neq \lg 100$$

$$x \neq 100$$

Учитывая эти два обстоятельства, приходим к выводу, что $x\epsilon(10; 100) \cup (100; +\infty)$

Ответ: $(10; 100) \cup (100; +\infty)$

Пример 8. Решите неравенство $\log_2 \frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$

Число 0 заменим на логарифм с основанием 2:

$$0 = \log_2 1$$

Получим неравенство:

$$\log_2 \frac{x^2-1}{(x-2)^2} > \log_2 1 <=> \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0 \\ \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2} > 1, \text{т. к } 2 > 1 \end{cases} <=> \frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 1$$

$$\frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 1$$

$$\frac{x^2-1}{(x-2)^2} - 1 > 0$$

$$\frac{x^2 - 1 - (x-2)^2}{(x-2)^2} > 0$$

$$\frac{x^2 - 1 - x^2 + 4x - 4}{(x-2)^2} > 0$$

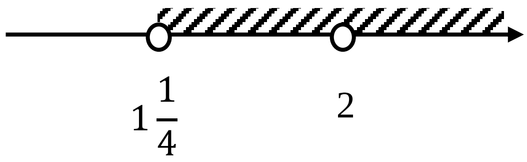
$$\frac{4x - 5}{(x-2)^2} > 0$$

Дробь принимает положительные значения если числитель и знаменатель одного знака, а т.к. при $x \neq 2$ $(x-2)^2 > 0$, то

$$4x - 5 > 0$$

$$4x > 5$$

$$x > 1\frac{1}{4}$$



$$x \in \left(1\frac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $\left(1\frac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Глава 13. «Смешанные системы уравнений»

В разделе рассмотрены основные методы решения систем с двумя переменными иррациональных, логарифмических и показательных уравнений.

Прежде чем непосредственно переходить к методам решения систем уравнений напомним основные определения и свойства различных функций, которые могут входить в уравнения системы. Напомним, что два уравнения с двумя неизвестными образуют систему уравнений, если ставится задача о нахождении таких значений переменных, которые являются решениями каждого из уравнений.

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел, при подстановке которых в систему вместо соответствующих переменных, получаются верные числовые равенства. Решить систему уравнений – означает найти все ее решения. Процесс решения системы уравнений, как и процесс решения уравнения, состоит в последовательном переходе с помощью некоторых преобразований от данной системы к более простой. Обычно пользуются преобразованиями, которые приводят к равносильной системе, в этом случае не требуется проверка найденных решений. Если же были использованы неравносильные преобразования, то обязательна проверка найденных решений.

При решении систем иррациональных уравнений используются два основных метода:

1) возведение обеих частей уравнений в одну и ту же степень;

2) введение новых переменных.

При решении систем иррациональных уравнений первым методом следует помнить, что при возведении обеих частей уравнения, содержащего корни четной степени, в одну и туже степень, получается уравнение, которое является следствием первоначального, в связи с этим, в процессе решения могут появиться посторонние корни. При решении иррациональных уравнений часто используется формула $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n$ = f(x), применение которой в случае четного n может привести к расширению области определения уравнения. По этим (и по другим) причинам при решении иррациональных уравнений в большинстве случаев необходима проверка найденных решений. Основные свойства показательной и логарифмической функций:

3. Область определения функции $y=a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$- всё множество действительных чисел; функции $y=\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1$- множество положительных действительных чисел.

4. Множество значений функции $y=a^x$- множество положительных действительных чисел; функции $y=\log_a x$- всё множество действительных чисел.

Промежутки монотонности: если $a>1$обе функции возрастают; если $0<a<1$- обе функции убывают.

Замечание. В соответствии со вторым свойством, при решении логарифмических уравнений необходимо либо выяснять область допустимых значений уравнения, либо после решения делать проверку. При решении систем показательных уравнений, применяются те же приемы, что при решении систем алгебраических уравнений (метод подстановки, метод сложения, метод введения новых переменных). Во многих случаях, прежде чем применить тот или иной метод решения, следует преобразовать каждое уравнение системы к возможно более простому виду.

Пример 1 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ (3y-4)^2 = 4 \end{cases}$$

1-уравнению системы приведем к одному основанию.

Левую часть 2-го уравнения упростим применив формулу сокращенного умножения.

$$\begin{cases} 3^y \cdot 3^{2x} = 3^4 \\ 9y^2 - 24y + 16 = 4; \end{cases}, \quad \begin{cases} y + 2x = 4, \\ 9y^2 - 24y + 16 - 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 9y^2 - 24y + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 3y^2 - 8y + 4 = 0. \end{cases}$$

Решим 2– уравнение: D= в^2–4ас= 64–48=16

$y_{1,2}=\frac{-в\mp\sqrt{Д}}{2a}$, $y_1=\frac{8-\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$y_2=\frac{8+\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}=2$

Значение у подставим в 1 –уравнение вместо у и найдем значение х:

$\frac{2}{3}=4-2x$, 2х=4–$\frac{2}{3}$, 2х=$\frac{10}{3}$, х=$\frac{10}{3}:2$, х= $\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{5}{3}$

2=4-2х, 2х=2, $x_2=1$.

$x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=1$ $y_1=\frac{2}{3}$, $y_2=2$,

Значения х и у поставим в систему уравнения и проверим.

$\begin{cases}\frac{2}{3}+2\cdot\frac{5}{3}=4,\\(3\cdot\frac{2}{3}-4)^2=4;\end{cases}$ $\begin{cases}2+2\cdot 1=4,\\(3\cdot 2-4)^2=4;\end{cases}$

Ответ: $(\frac{5}{3};\frac{2}{3})$, (1; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$\begin{cases}\log_5(4x^2-4xy+y^2)=0,\\\log_{\sqrt{5}}(2x+y)=2\,;\end{cases}$, $\begin{cases}\log_5(2x-y)^2)=0,\\\log_{\sqrt{5}}(2x+y)=2\,;\end{cases}$.

Находим область определения: 2х>-у

Используя определение логарифма, получаем систему уравнении с двумя неизвестными: $\begin{cases}(2x-y)^2=1\\2x+y=5\end{cases}$

Решим систему двумя способами :

3. $\begin{cases}2x-y=1\\2x+y=5\end{cases}$,

4х =6

х=1,5

у=2

4. $\begin{cases}2x-y=-1\\2x+y=5\end{cases}$

4х = 4

х=1

у=3

Ответ: (1,5; 2); (1; 3).

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+3}=7\\3x+2y=22\end{cases}$

Возводим в квадрат обе стороны первого уравнения

$$\begin{cases} x+y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)}+2x+y+3=49 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)}+3x+2y+3=49 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$$

Получившегося значения уравнения ставим в первое:

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)}+22+3=49 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+y)(2x+y+3)}=24 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+y)(2x+y+3)}=12 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$$

Возводим в квадрат первое уравнение, во втором уравнений у выразим через х

$$\begin{cases} (x+y)(2x+y+3)=144 \\ y=\frac{22-3x}{2} \end{cases}$$

Решим уравнение с одним неизвестным способом подстановкой:

$$\left(x+\frac{22-3x}{2}\right)\left(2x+\frac{22-3x}{2}+3\right)=144$$

(2x+22-3x)(4x+22-3x+6)=576

(22-x)(x+28)=576

$-x^2+22x-28x+616-576=0$

$x^2+6x-40=0$

Корни получившихся уравнений следующие:

$x_1=-10$, соответсвует $y_1=26$

$x_2=4$, соответсвует $y_2=5$

Ответ: (-10; 26), (4; 5)

Глава 14. «Текстовые задачи»

Решение текстовых задач у многих учащихся вызывает затруднения. Универсальных методов не существует, но, решая такие задачи, можно придерживаться следующей схемы:

4) Выбрать неизвестные. В большинстве случаев за неизвестную взять ту величину, которую требуется определить в задаче, иногда проще составить уравнения, в которые входят другие величины и лишь после их определения найти окончательный ответ.
5) Составить уравнение. В процессе составления уравнения или системы уравнений важно использовать все условия задачи. Количество уравнений должно совпасть с количеством неизвестных.
6) Найти нужную неизвестную или нужную комбинацию неизвестных.

Если приходится отбрасывать некоторые корни, то необходимо это делать исходя из условия задачи.

Текстовые задачи удобно классифицировать по следующим группам:

А) задачи на движение;

Б) задачи на работу и производительность труда;

В) задачи на концентрацию и процентное содержание;

Г) задачи на проценты.

А) Задачи на движение

Основными компонентами этого типа задач являются:

S – пройденный путь;

V – скорость;

t – время движения.

1. Равномерное движение по прямой.

Пример 1

Из двух железнодорожных станций, расстояние между которыми 124 км, одновременно отправились в противоположных направлениях два поезда, через 1 час 15 минут после начала движения расстояние между поездами стало 369 км. Скорость первого поезда относится к скорости второго поезда, как 3:4. Найти скорость каждого поезда.

1 способ решения (оформления):

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда скорость первого поезда 3x км/ч, а второго 4x км/ч. Тогда 1 поезд за 1 час 15 минут = 1,25 ч, проехал расстояние $3x\cdot 1{,}25 = 3{,}75x$ (км), а второй поезд $4x\cdot 1{,}25 = 5x$ (км).

По условию задачи расстояние между поездами на начало движения было 124 км, а через 1,25 ч стало 369 км, составим уравнение:

$3x \cdot 1,25 + 4x \cdot 1,25 = 369 - 124$

$3,75x + 5x = 245$

$8,75x = 245$

$x = 28$

Тогда скорость первого поезда – 28·3 = 84 (км/ч), а второго – 28·4 = 112 (км/ч)

Ответ: 84 км/ч, 112 км/ч.

2 способ решения (оформления) табличный

1 час 15 мин = 1,25 ч

Пусть x км приходится на 1 часть:

	V, км/ч	t, ч	S, км
1 поезд	3x	1,25	3x·1,25
2 поезд	4x	1,25	4x·1,25

По условию задачи расстояние между поездами на начало движения было 124 км, а через 1,25 ч стало 369 км, составим уравнение:

$3x \cdot 1,25 + 4x \cdot 1,25 = 369 - 124$

$3,75x + 5x = 245$

$8,75x = 245$

$x = 28$

Тогда скорость первого поезда – 28·3 = 84 (км/ч), а второго – 28·4=112 (км/ч)

Ответ: 84 км/ч, 112 км/ч.

2. Движение по реке.

Пример 2

Катер по течению реки прошел путь от пристани А до пристани В за 6 часов. Скорость течения реки 2 км/ч. Возвращаясь обратно, катер шел против течения реки и потратил 7 часов. Найти собственную скорость катера.

1способ решения (оформления):

Обозначим скорость лодки собственную x (км/ч), x >2

	V, км/ч	t, ч	S, км
Против течения	x-2	7	7(x-2)
По течению	x+2	6	6(x+2)
В стоячей воде	x		
Течение реки	2		

Известно, что на путь по течению реки катер затратил 6 часов, а против – 7 часов, проходя одинаковое расстояние. Составим уравнение:

7(х-2) = 6(х+2)

7х – 14 = 6х + 12

7х – 6х = 12 + 14

х = 26

Собственная скорость - 26 км/ч

Ответ: 26 км/ч

2 способ решения (оформления):

Пусть х км/ч – собственная скорость катера, тогда, учитывая, что скорость течения реки 2 км/ч; скорость по течению (х + 2) км/ч, а против – (х – 2) км/ч, причем х>2.

Известно, что на путь по течению реки катер затратил 6 часов, а против – 7 часов, проходя одинаковое расстояние. Составим уравнение:

7(х-2) = 6(х+2)

7х – 14 = 6х + 12

7х – 6х = 12 + 14

х = 26

Собственная скорость - 26 км/ч

Ответ: 26 км/ч

Б) Задачи на работу и производительность труда

Основными компонентами данного типа задач являются:

А – работа;

N – производительность труда (работа, выполняемая в единицу времени);

t – время

Такие задачи рациональнее решать, используя табличный способ.

Пример 3.

Один штукатур может выполнить задание на 5 часов быстрее другого. Оба вместе они выполнят это задание за 6 часов. За сколько каждый из них выполнит задание.

1 способ решения (оформления):

Пусть второй штукатур может выполнить работу за х часов, тогда первый – за (х + 5) часов (х>0).

Принимая всю работу, которую необходимо выполнить за 1, получаем $\frac{1}{x}$ - производительность работы второго штукатура, $\frac{1}{x+5}$ - производительность первого штукатура. Известно, что работая совместно, они выполняют работу за 6 часов, тогда совместная производительность штукатуров равна $\frac{1}{6}$.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} \quad |\times 6x(x+5)\neq 0$$

6(x + 5) + 6x = x(x + 5)

6x + 30 + 6x = x^2 + 5x

x^2 – 7x – 30 = 0

Решим квадратное уравнение по теореме, обратной теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=-30 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-3<0 \text{ (не удовлетворяет условию)} \end{array} \right.$$

Следовательно, 2-ой штукатур выполняет работу за 10 (ч), а 1-ый – за 15 (ч)

Ответ: 10ч, 15ч.

2 способ решения (оформления) задачи:

Обозначим время работы 2 штукатура – x час

	время, ч	работа за 1 час	выполненная работа
1 штукатур	x + 5	1/(x+5)	1
2 штукатур	x, x>0	1/x	1
совместно	6	1/6	1

Известно, что работая совместно, они выполняют работу за 6 часов, тогда совместная производительность штукатуров равна $\frac{1}{6}$. Составим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} \quad |\times 6x(x+5)\neq 0$$

6(x + 5) + 6x = x(x + 5)

6x + 30 + 6x = x^2 + 5x

x^2 – 7x – 30 = 0

Решим квадратное уравнение по теореме, обратной теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=-30 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-3<0 \text{ (не удовлетворяет условию)} \end{array} \right.$$

Следовательно, 2-ой штукатур выполняет работу за 10 (ч), а 1-ый – за 15 (ч)

Ответ: 10ч, 15ч.

В) Задачи на концентрацию и процентное содержание

Эти задачи вызывают наибольшие затруднения. В данном случае очень важно разобраться в условии задачи и попытаться разбить на простейшие.

План решения задачи.

7. Выбор неизвестных. В качестве неизвестных чаще всего выбирают те величины, которые требуются найти.

8. Выбор чистого вещества.
9. Переход к дробям. Если в задаче есть процентные содержания, то их следует перевести в дроби.
10. Отслеживание состояния смеси.
11. Составление уравнения.
12. Формирование ответа.

Пример 4.

Морская вода содержит 8 % соли. Сколько кг пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 5 %?

1 способ решения (оформления):

Пусть требуется добавить x кг пресной воды, x>0.

За чистое вещество, принимаем соль.

Решение оформляем таблицей:

8% = 0,08, 5% = 0,05

смесь	кол-во чистого вещества, кг	общее кол-во смеси, кг	массовая концентрация
I	0,08·30	30	0,08
II	0,05·(30+x)	30 + x, x>0	0,05

По условию задачи количество чистого вещества остается неизменным, составим уравнение:

0,08·30 = 0,05· (30 + x)

2,4 = 1,5 + 0,05x

0,05x = 0,9

x = 18

Ответ: 18 кг воды.

2 способ решения (оформления) задачи:

Пусть x кг пресной воды требуется добавить, x>0. За чистое вещество, принимаем соль.

Решение оформляем таблицей:

	масса, кг	% содержание соли	соль, кг
Пресная вода	x, x>0	0	0
Морская вода I	30	0,08	0,08·30
Морская вода II	30 + x	0,05	0,05·(30+x)

По условию задачи количество чистого вещества остается неизменным, составим уравнение:

0,08·30 = 0,05· (30 + x)

2,4 = 1,5 + 0,05x
0,05x = 0,9
x = 18
Ответ: 18 кг воды.

Г) Задачи на проценты

Пример 5.
Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов.
Решение:
Обозначим вес сухих грибов x кг, x>0, т.к. в свежих грибах 90% воды, то сухого вещества в них 10%. В сухих грибах сухого вещества 88%.
Оформим решение таблицей:

	масса, кг	вода (% содержание)	вода, кг	сухое вещ-во, кг
Свежие грибы	22	90	0,9·22 = 19,8	2,2
Сухие грибы	X	12	0,12x	0,88x

Составим уравнение:
0,88x = 2,2
x = 2,2/0,88
x = 220/88
x = 2,5
Ответ: 2,5 кг
Умение решать текстовые задачи зависит от навыков учащихся. Предложенные схемы решения задач охватывает основные типы текстовых задач. Словесная, описательная форма записи неудобна. В задачах на работу, на смеси можно использовать запись в виде таблицы. Такая запись очень компактна, наглядна и полностью заменяет саму формулировку необходимой задачи, но ученик может выбрать любой способ оформления.

Глава 15. «Последовательности»

В этом разделе предложены задачи на нахождение первых членов последовательности, заданной формулой n-го члена, рекуррентной формулой, на нахождение формулы общего члена последовательности, нахождение n-го члена, суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии, первого члена и разности арифметической прогрессии, первого члена и знаменателя геометрической прогрессии, нахождение суммы чисел, которые могут быть представлены в виде членов арифметической и геометрической прогрессии, на нахождение суммы всех отрицательных (положительных) членов прогрессии, номера члена прогрессии, суммы бесконечной геометрической прогрессии.

При решении заданий этого раздела учащийся должен продемонстрировать знание формул, свойств прогрессий, умение их применять, умение составлять и решать уравнения и их системы, неравенства, вычислительные навыки.

Надо отметить, что при решении задач на прогрессии у учащихся возникают трудности, если формулировка задания отличается от традиционной. При подготовке учащихся надо нацеливать обращать особое внимание на дополнительные слова в условии, такие как «в возрастающей геометрической прогрессии», «в прогрессии с положительными членами», «$b_n \geq 0$» и необходимость рассматривать два случая в решении, если найдено значение четной степени знаменателя геометрической прогрессии, при отсутствии дополнительных условий.

При решении заданий этого раздела надо требовать записывать формулу, и только потом показывать ее применение.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример1. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии

b_4=54, b_8=4374

1 способ

Дано:

$\{b_n\}$ – *геометрическая прогрессия*

b_4 *=54,* b_8 *=4374*

Найти:

b_1, q

Решение:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$b_8 = b_1 \cdot q^7$$

$$\begin{cases} 4374 = b_1 \cdot q^7 \\ 54 = b_1 \cdot q^3 \end{cases}$$

$$b_1 \neq 0, q \neq 0$$

$$\frac{4374}{54} = \frac{b_1 \cdot q^7}{b_1 \cdot q^3}$$

$$81 = q^4$$

$$q = \pm 3$$

$\text{åñëè}: q = 3, \text{òî}$

$$b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{54}{3^3} = \frac{54}{27} = 2$$

$\text{åñëè}: q = -3, \text{òî}$

$$b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{54}{(-3)^3} = \frac{54}{-27} = -2$$

Ответ: *q=3,* b_1 *=2 или q= – 3,* b_1 *= – 2*

2 способ

Дано:
$\{b_n\}$ – *геометрическая прогрессия*
$b_4 = 54$, $b_8 = 4374$
Найти:
$b_1,\ q$

Решение:

$$q^{m-k} = \frac{b_m}{b_k}$$

$$q^{8-4} = \frac{b_8}{b_4}$$

$$q^4 = \frac{4374}{54}$$

$$q^4 = 81$$

$$q = \pm 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3 \\ b_1 = \dfrac{b_4}{q^3} \end{cases} \\ \begin{cases} q = -3 \\ b_1 = \dfrac{b_4}{q^3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3 \\ b_1 = \dfrac{54}{3^3} = \dfrac{54}{27} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -3 \\ b_1 = \dfrac{54}{(-3)^3} = \dfrac{54}{-27} = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $q=3$, $b_1 = 2$ *или* $q = -3$, $b_1 = -2$

Пример 2. Определите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_{11}=6$, $a_{20}=12$

1 способ

Дано:
$\{a_n\}$ – *арифметическая прогрессия*
$a_{11} = 6$, $a_{20} = 12$
Найти:
$a_1,\ d$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$a_{20} = a_1 + 19d$$

$$\begin{cases} a_1 + 10d = 6 /(-1) \\ a_1 + 19d = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 19d = 12 \\ -a_1 - 10d = -6 \end{cases}$$

$$9d = 6$$

$$d = \frac{2}{3}$$

$$a_1 + 10d = 6$$

$$a_1 = 6 - 10d = 6 - \frac{10 \cdot 2}{3} = 6 - \frac{20}{3} =$$

$$= 6 - 6\frac{2}{3} =$$

$$= -\frac{2}{3}$$

Ответ: $d = \dfrac{2}{3}, a_1 = -\dfrac{2}{3}$

2 способ

Дано:
$\{a_n\}$ – *арифметическая прогрессия*
a_{11} =6, a_{20} =12
Найти:
$a_1,\ d$

Решение:

$$d=\frac{a_n-a_k}{n-k}$$

$$d=\frac{a_{20}-a_{11}}{20-11}$$

$$d=\frac{12-6}{20-11}=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\mathrm{a}_1+d(n-1)$$

$$a_{11}=\mathrm{a}_1+10d=6$$

$$\mathrm{a}_1=6-10d=6-\frac{10\cdot 2}{3}=6-\frac{20}{3}=$$

$$=6-6\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

Ответ: $d=\frac{2}{3}, \mathrm{a}_1=-\frac{2}{3}$

Пример 3. Найдите сумму всех натуральных чисел, при делении на 3 дающих в остатке 1 и не превосходящих 1000

Дано:
4;7;10;…; a_n
$a_n \le 1000$

Найти:
S_n

Решение:

$$a_n=3n+1$$

$$n\in N$$

$\{a_n\}$ – *арифметическая прогрессия*

$$a_n\le 1000$$

$$3n+1\le 1000$$

$$3n\le 999$$

$$n\le 333$$

$$a_{333}=3\cdot 333+1=1000$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$$

$$S_n=\frac{a_1+a_{333}}{2}333=\frac{4+1000}{2}\cdot 333=\frac{1004\cdot 333}{2}=$$

$$=167166$$

Ответ: $S_n=167166$

Глава 16. «Геометрия»

Учащийся должен продемонстрировать знание теоретического материала и умение применять его на практике.

При оформлении решения желательно придерживаться следующих рекомендаций:

-если при решении задачи используется чертеж, то он должен быть расположен слева, а условие- справа,

-чертеж должен быть аккуратным и должен быть выполнен ручкой,

- должны быть записаны используемые формулы,

-при обосновании хода решения необходимы ссылки на используемые теоремы, свойства, признаки,

- если нет необходимости, то не требуется использование в ходе решения единиц измерения величин.

Рассмотрим несколько задач.

Пример1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ и угол между данными векторами равен 30°

Дано:

$\vec{a}, \vec{b}$

$|\vec{a}| = 4$

$|\vec{b}| = \sqrt{3}$

$(\vec{a} \hat{;} \vec{b}) = \varphi = 30^{o}$

Найти : $\vec{a} \cdot \vec{b}$

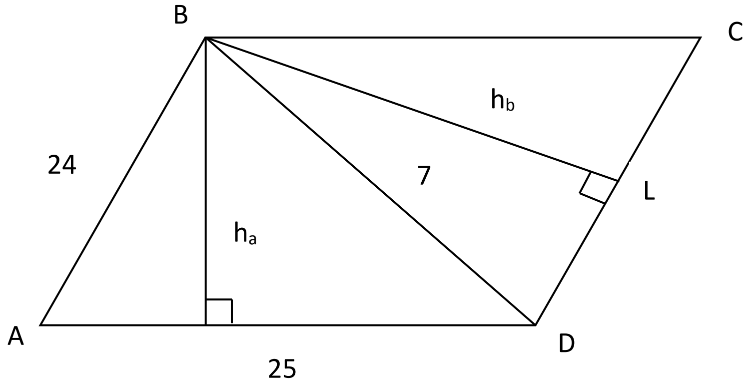
Решение:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot \sqrt{3} \cos 30^{o} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$

Ответ: 6

Пример 2. Определите высоты параллелограмма, стороны которого 24 см, 25 см, а меньшая диагональ 7 см.



Дано:

$ABCD$ – *параллелограмм*

$a = 25$*см*

$b = 24$*см*

$d_1 < d_2$

$d_1 = 7$*см*

Найти: h_a, h_b

1. Рассмотрим треугольник ABD: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{25+24+7}{2} = 28$ *см*

По формуле Герона:

$$S_{\Delta ABD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{28(28-25)(28-24)(28-7)} =$$
$$= \sqrt{28 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3} = 84$$

2. Рассмотрим треугольники ABD и CDB

4) AB=CD (по свойству параллелограмма)
5) BC=AD (по свойству параллелограмма)
6) BD – общая

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta CDB$ (по трем сторонам) $\Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CDB}$

3. $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot 84 = 168$ *см²*

4. $S_{ABCD} = ah_a = b \cdot h_b$

$$h_a = \frac{S}{a} = \frac{168}{25} = 6\frac{18}{25}$$

$$h_b = \frac{S}{b} = \frac{168}{24} = 7$$

Ответ: $6\frac{18}{25}$ см или 7 см.